プラズマ波動検討ノート

変態 plasman

2024 年 2 月 18 日

目 次

第1章　電磁波について

1.1　はじめに

マックスウェル方程式は、

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} \tag{1.1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t) = \mu_0 \boldsymbol{J}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} \tag{1.2}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int \nabla \cdot \boldsymbol{J}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t) \mathrm{d}t \tag{1.3}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t) = 0 \tag{1.4}$$

である。ここで、$\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t)$、$\boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t)$、$\boldsymbol{J}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t)$、$t$、$\rho_{\mathrm{g}}$、$\epsilon_0$、$\mu_0$ は、それぞれ電磁波の電場ベクトル、磁束密度ベクトル、荷電粒子 s による電流、荷電粒子 s の電荷密度、時間、真空中の誘電率、真空中の透磁率であり、$\sum_s$ は、全荷電粒子について電流の和を取ることを意味している。添え字の”g”は general からとっている。

なお、(1.3) 式はもともと

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t) = \frac{\rho_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t)}{\varepsilon_0} \tag{1.5}$$

であるが、電荷保存の関係、

$$\frac{\partial \rho_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{J}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t) = 0 \tag{1.6}$$

を用いると、(1.3) 式となる。

1.1.0.0.1　波動方程式を求める　マックスウェル方程式の 2 式、

$$\nabla \times \boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t) = -\frac{\partial \boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} \tag{1.7}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t) = \mu_0 \boldsymbol{J}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} \tag{1.8}$$

に左から回転を取って、互いの式を代入する。波動の波長や周期に対して導電率の変化は非常に小さいと仮定を用いる。電場については、

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t) &= -\frac{\partial \nabla \times \boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} && (1.9) \\ &= -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{J}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t^2} && (1.10) \end{aligned}$$

ベクトル公式

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{a} = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{a}) - \nabla^2 \boldsymbol{a} \tag{1.11}$$

を用いて、電場の波動方程式の形に表すと、

$$\nabla^2 \boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t) - \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{J}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t^2} - \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t)) = 0 \tag{1.12}$$

1.1.0.0.2　複素電場の表現　ここでは、電磁波が角周波数 ω、Z 方向のみに伝播する波数 k の平面波であるとし（ただし、ω、k は複素数である）、電場ベクトルの X 成分、Y 成分、Z 成分を、

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)=\begin{pmatrix} E_{\mathrm{g}X}(\boldsymbol{r},t) \\ E_{\mathrm{g}Y}(\boldsymbol{r},t) \\ E_{\mathrm{g}Z}(\boldsymbol{r},t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \Re\left[E_{X0}\exp\left\{i(kZ-\omega t)\right\}\right] \\ \Re\left[E_{Y0}\exp\left\{i(kZ-\omega t)\right\}\right] \\ \Re\left[E_{Z0}\exp\left\{i(kZ-\omega t)\right\}\right] \end{pmatrix} \tag{1.13}$$

とする。

1.1.0.0.3　導電率を含めた波数を求める　電場が波動であるとするし、下のように複素数の考え方を導入する。

$$\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{2}(\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)) \tag{1.14}$$

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{2}(\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{J}^*(\boldsymbol{r},t)) \tag{1.15}$$

とすると、波動方程式 (1.12) は、

$$\begin{aligned} &-k^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+i\mu_0\omega\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)+\mu_0\varepsilon_0\omega^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t))\boldsymbol{k} \\ &-k^{*2}\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)-i\mu_0\omega^*\boldsymbol{J}^*(\boldsymbol{r},t)+\mu_0\varepsilon_0\omega^{*2}\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)+(\boldsymbol{k}^*\cdot\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t))\boldsymbol{k}^*=0 \end{aligned} \tag{1.16}$$

分けると、

$$-k^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+i\mu_0\omega\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)+\mu_0\varepsilon_0\omega^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t))\boldsymbol{k}=0 \tag{1.17}$$

$$-k^{*2}\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)-i\mu_0\omega^*\boldsymbol{J}^*(\boldsymbol{r},t)+\mu_0\varepsilon_0\omega^{*2}\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)+(\boldsymbol{k}^*\cdot\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t))\boldsymbol{k}^*=0 \tag{1.18}$$

電流密度ベクトルを導電率テンソルと電場ベクトルとで表せる場合、すなわち、

$$\begin{cases} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \\ \boldsymbol{J}^*(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{\sigma}_2\cdot\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t) \end{cases} \tag{1.19}$$

と表すことができる場合、XYZ 座標系で、

$$(-k^2+\mu_0\varepsilon_0\omega^2)\begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix}+i\mu_0\omega\begin{pmatrix} \sigma_{1XX} & \sigma_{1XY} & \sigma_{1XZ} \\ \sigma_{1YX} & \sigma_{1YY} & \sigma_{1YZ} \\ \sigma_{1ZX} & \sigma_{1ZY} & \sigma_{1ZZ} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix} \tag{1.20}$$

$$\begin{pmatrix} -k^2+\mu_0\varepsilon_0\omega^2+i\mu_0\omega\sigma_{1XX} & i\mu_0\omega\sigma_{1XY} & i\mu_0\omega\sigma_{1XZ} \\ i\mu_0\omega\sigma_{1YX} & -k^2+\mu_0\varepsilon_0\omega^2+i\mu_0\omega\sigma_{1YY} & i\mu_0\omega\sigma_{1YZ} \\ i\mu_0\omega\sigma_{1ZX} & i\mu_0\omega\sigma_{1ZY} & \mu_0\varepsilon_0\omega^2+i\mu_0\omega\sigma_{1ZZ} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_X(\boldsymbol{r},t) \\ E_Y(\boldsymbol{r},t) \\ E_Z(\boldsymbol{r},t) \end{pmatrix}=\boldsymbol{0} \tag{1.21}$$

同様に、

$$\begin{pmatrix} -k^{*2}+\mu_0\varepsilon_0\omega^{*2}-i\mu_0\omega^*\sigma_{2XX} & -i\mu_0\omega^*\sigma_{2XY} & -i\mu_0\omega^*\sigma_{2XZ} \\ -i\mu_0\omega^*\sigma_{2YX} & -k^{*2}+\mu_0\varepsilon_0\omega^{*2}-i\mu_0\omega^*\sigma_{2YY} & -i\mu_0\omega^*\sigma_{2YZ} \\ -i\mu_0\omega^*\sigma_{2ZX} & -i\mu_0\omega^*\sigma_{2ZY} & \mu_0\varepsilon_0\omega^{*2}-i\mu_0\omega^*\sigma_{2ZZ} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {E_X}^*(\boldsymbol{r},t) \\ {E_Y}^*(\boldsymbol{r},t) \\ {E_Z}^*(\boldsymbol{r},t) \end{pmatrix}=\boldsymbol{0} \tag{1.22}$$

なお、$\boldsymbol{\sigma}$ の性質が分かっていないため、$\boldsymbol{\sigma}_1$、$\boldsymbol{\sigma}_2$ のように互いに関係ないと仮定した。

1.1.0.0.4　誘電率テンソル　電束密度ベクトル $\boldsymbol{D}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)$ を、

$$\frac{\partial \boldsymbol{D}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = \boldsymbol{J}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t) + \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \tag{1.23}$$

となるよう定義する。そうすると、マックスウェル方程式は、

$$\begin{cases} \nabla \times \boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t) = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \\ \nabla \times \boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t) = \mu_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{D}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{D}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t) = 0 \\ \nabla \cdot \boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t) = 0 \end{cases} \tag{1.24}$$

となる。電束密度ベクトル $\boldsymbol{D}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)$ と電場ベクトル $\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)$ との関係をテンソル $\boldsymbol{K}$ を用いて、

$$\boldsymbol{D}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t) = \varepsilon_0 \boldsymbol{K} \cdot \boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t) \tag{1.25}$$

表すことができるとする。このテンソル $\boldsymbol{K}$ を誘電率テンソルという。

$\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)$, $\boldsymbol{J}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)$ が $\exp\{i(kZ-\omega t)\}$ の波動であるとすると、(1.23) 式から、

$$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{k},\omega) = -i\omega\varepsilon_0 \{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega) - \boldsymbol{I}\} \tag{1.26}$$

の関係が得られる。

1.1.0.0.5　磁場の表現　磁束密度ベクトル $\boldsymbol{B}$ の磁場ベクトルを求める。(1.1) 式から出発する。

$$i\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E} = i\omega \boldsymbol{B} \tag{1.27}$$

$$\boldsymbol{B} = \frac{\boldsymbol{k}}{\omega} \times \boldsymbol{E} \tag{1.28}$$

すなわち、

$$\boldsymbol{B} = \frac{1}{\omega} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_X & \boldsymbol{e}_Y & \boldsymbol{e}_Z \\ 0 & 0 & k \\ E_X & E_Y & E_Z \end{vmatrix} \tag{1.29}$$

$$= \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} -kE_Y \\ kE_X \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.30}$$

$$= \frac{k}{\omega} \begin{pmatrix} -E_{Y0} \exp\{i(kZ-\omega t)\} \\ E_{X0} \exp\{i(kZ-\omega t)\} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.31}$$

同様に、

$$\boldsymbol{B}^* = \frac{1}{\omega^*} \begin{pmatrix} -k^* {E_Y}^* \\ k^* {E_X}^* \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.32}$$

$$= \frac{k^*}{\omega^*} \begin{pmatrix} -{E_{Y0}}^* \exp\{-i(k^*Z-\omega^* t)\} \\ {E_{X0}}^* \exp\{-i(k^*Z-\omega^* t)\} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{1.33}$$

逆に、電場ベクトルを磁場ベクトルで表すと、

$$\boldsymbol{E} = \frac{\omega}{k}\begin{pmatrix} B_{Y0}\exp\{i(kZ-\omega t)\} \\ -B_{X0}\exp\{i(kZ-\omega t)\} \\ \cdots \end{pmatrix} \tag{1.34}$$

1.1.0.0.6　導電率がスカラーの場合　電流密度ベクトルが導電率を用いて表すことができ、さらに導電率がスカラーの場合は、磁場についての波動方程式も導かれる。左から回転を取って、互いの式を代入する。導電率は空間的に一様（$\nabla\sigma = 0$）とする。

$$\begin{aligned}
\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{B}_{\mathrm{g}} &= \mu_0\nabla\times(\sigma\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}) + \mu_0\varepsilon_0\cdot\frac{\partial\nabla\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}}{\partial t} && (1.35)\\
&= \mu_0(\nabla\sigma\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}} + \sigma\nabla\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}) + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\nabla\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}}{\partial t} && (1.36)\\
&= \mu_0\sigma\nabla\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\nabla\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}}{\partial t} && (1.37)\\
&= \mu_0\sigma\left(-\frac{\partial\boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}}{\partial t}\right) + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial\boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}}{\partial t}\right) && (1.38)\\
&= -\mu_0\sigma\frac{\partial\boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}}{\partial t} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}}{\partial t^2} && (1.39)
\end{aligned}$$

電場の波動方程式とセットにして、

$$\begin{aligned}
\nabla^2\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}} - \mu_0\sigma\frac{\partial\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}}{\partial t} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}}{\partial t^2} &= \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}) && (1.40)\\
\nabla^2\boldsymbol{B}_{\mathrm{g}} - \mu_0\sigma\frac{\partial\boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}}{\partial t} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}}{\partial t^2} &= \boldsymbol{0} && (1.41)
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}$,$\boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}$ が波数 $\boldsymbol{k}$, 周波数 ω の波動であるとする。磁場に関する波動方程式において磁場がゼロでない条件は、

$$-k^2 + i\mu_0\sigma\omega + \mu_0\varepsilon_0\omega^2 = 0 \tag{1.42}$$

電場に関する波動方程式に代入すると、

$$\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E}) = \boldsymbol{0} \tag{1.43}$$

でないといけない。恒等的に成り立つためには、

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = 0 \tag{1.44}$$

したがって、電場の向きは波数ベクトルの向きと直交する。

ただし、磁場がゼロである場合は、$\nabla\cdot\boldsymbol{E} = 0$ である必要はない。

$k = k_r + ik_i$ とすると、$k^2 = {k_r}^2 - {k_i}^2 + 2ik_rk_i$ であるから、

$$\left\{\begin{aligned} {k_r}^2 - {k_i}^2 &= \omega^2\mu_0\varepsilon_0 \\ 2k_rk_i &= \omega\mu_0\sigma \end{aligned}\right. \tag{1.45}$$

である。

ところで、σ が k の関数でない場合上式をを解くことができる。$k_r \neq 0$ ならば、第２式を変形したもの

$$k_i = \omega\mu_0\sigma/(2k_r) \tag{1.46}$$

を第１式に代入。

$$k_r{}^2 - (\omega\mu_0\sigma)^2/(4k_r{}^2) = \omega^2\mu_0\varepsilon_0 \tag{1.47}$$

$$k_r{}^4 - \omega^2\mu_0\varepsilon_0 k_r{}^2 - (\omega\mu_0\sigma)^2/4 = 0 \tag{1.48}$$

２次方程式を解いて、

$$k_r{}^2 = \frac{\omega^2\mu_0\varepsilon_0 \pm \sqrt{\omega^4\mu_0{}^2\varepsilon_0{}^2 + \omega^2\mu_0{}^2\sigma^2}}{2} \tag{1.49}$$

$$= \frac{\omega^2\mu_0\varepsilon_0}{2}\left\{1 \pm \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon_0{}^2}}\right\} \tag{1.50}$$

$\omega > 0,\ \mu_0 > 0,\ \varepsilon_0 > 0$ であるとして、

$$k_r = \pm\sqrt{\frac{\omega^2\mu_0\varepsilon_0}{2}}\sqrt{1 \pm \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon_0{}^2}}} \tag{1.51}$$

$$k_i = \frac{\omega\mu_0\sigma}{2k_r} \tag{1.52}$$

$$= \frac{\omega\mu_0\sigma}{2}\frac{1}{\pm\sqrt{\frac{\omega^2\mu_0\varepsilon_0}{2}}\sqrt{1 \pm \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon_0{}^2}}}} \tag{1.53}$$

$$= \frac{\omega\mu_0\sigma}{2}\frac{1}{\pm\sqrt{\frac{\omega^2\mu_0\varepsilon_0}{2}}\sqrt{1 \pm \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon_0{}^2}}}}\frac{\sqrt{1 \mp \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon_0{}^2}}}}{\sqrt{1 \mp \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon_0{}^2}}}} \tag{1.54}$$

$$= \frac{\omega\mu_0\sigma}{2}\frac{\sqrt{1 \mp \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon_0{}^2}}}}{\pm\sqrt{\frac{\omega^2\mu_0\varepsilon_0}{2}}i\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}} \tag{1.55}$$

$$= \pm\sqrt{\frac{\omega^2\mu_0\varepsilon_0}{2}}\sqrt{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon_0{}^2}}} \tag{1.56}$$

まとめると、

$$k_r = \pm\sqrt{\frac{\omega^2\mu_0\varepsilon_0}{2}}\sqrt{1 \pm \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon_0{}^2}}} \tag{1.57}$$

$$k_i = \pm\sqrt{\frac{\omega^2\mu_0\varepsilon_0}{2}}\sqrt{-1 \pm \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon_0{}^2}}} \tag{1.58}$$

ただし、k_r, k_i は実数としたいため、ルート内を正に制限すると、

$$k_r = \pm\sqrt{\frac{\omega^2\mu_0\varepsilon_0}{2}}\sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon_0{}^2}}} \tag{1.59}$$

$$k_i = \pm\sqrt{\frac{\omega^2\mu_0\varepsilon_0}{2}}\sqrt{-1 + \sqrt{1 + \frac{\sigma^2}{\omega^2\varepsilon_0{}^2}}} \tag{1.60}$$

従って、導電率も含めた波数は、

$$k = \pm\omega\sqrt{\frac{\mu_0\varepsilon_0}{2}}\left\{\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2{\varepsilon_0}^2}}}+i\sqrt{-1+\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2{\varepsilon_0}^2}}}\right\} \tag{1.61}$$

屈折率で表すと、

$$N = \frac{kc}{\omega} = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}\left\{\sqrt{1+\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2{\varepsilon_0}^2}}}+i\sqrt{-1+\sqrt{1+\frac{\sigma^2}{\omega^2{\varepsilon_0}^2}}}\right\} \tag{1.62}$$

導電率が非常に小さい場合、$\frac{\sigma^2}{\omega^2{\varepsilon_0}^2} \ll 1$ は、

$$\begin{aligned} N &\approx \pm\sqrt{\frac{1}{2}}\left\{\sqrt{1+\left(1+\frac{\sigma^2}{2\omega^2{\varepsilon_0}^2}\right)}+i\sqrt{-1+\left(1+\frac{\sigma^2}{2\omega^2{\varepsilon_0}^2}\right)}\right\} &(1.63)\\ &\approx \pm\sqrt{\frac{1}{2}}\left\{\sqrt{2+\frac{\sigma^2}{2\omega^2{\varepsilon_0}^2}}+i\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\omega^2{\varepsilon_0}^2}}\right\} &(1.64)\\ &\approx \pm\left(1+i\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0}\right) &(1.65)\end{aligned}$$

導電率が 0 の時は、

$$N = \pm 1 \tag{1.66}$$

非常に大きな導電率 $\frac{\sigma^2}{\omega^2{\varepsilon_0}^2} \gg 1$ の場合は、

$$\begin{aligned} N &= \pm\sqrt{\frac{1}{2}}\{\sqrt{1+\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}\sqrt{1+\frac{\omega^2{\varepsilon_0}^2}{\sigma^2}}}+i\sqrt{-1+\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}\sqrt{1+\frac{\omega^2{\varepsilon_0}^2}{\sigma^2}}}\} &(1.67)\\ &\approx \pm\sqrt{\frac{1}{2}}\{\sqrt{1+\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}(1+\frac{1}{2}\frac{\omega^2{\varepsilon_0}^2}{\sigma^2})}+i\sqrt{-1+\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}(1+\frac{1}{2}\frac{\omega^2{\varepsilon_0}^2}{\sigma^2})}\} &(1.68)\\ &\approx \pm\sqrt{\frac{1}{2}}\{\sqrt{1+\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}}+i\sqrt{-1+\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}}\} &(1.69)\\ &\approx \pm\sqrt{\frac{1}{2}}\{\sqrt{\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}}+i\sqrt{\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}}\} &(1.70)\\ &\approx \pm\sqrt{\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0}}(1+i) &(1.71)\end{aligned}$$

1.1.1 波動方程式の解

$\boldsymbol{\sigma}$ が k の関数でない場合、k に関する二次方程式の解の公式を利用して、波動方程式を解くことができる。

$$\begin{vmatrix} -k^2+\mu_0\varepsilon_0\omega^2+i\mu_0\omega\sigma_{XX} & i\mu_0\omega\sigma_{XY} & i\mu_0\omega\sigma_{XZ} \\ i\mu_0\omega\sigma_{YX} & -k^2+\mu_0\varepsilon_0\omega^2+i\mu_0\omega\sigma_{YY} & i\mu_0\omega\sigma_{YZ} \\ i\mu_0\omega\sigma_{ZX} & i\mu_0\omega\sigma_{ZY} & \mu_0\varepsilon_0\omega^2+i\mu_0\omega\sigma_{ZZ} \end{vmatrix} \tag{1.72}$$

$$\begin{aligned}
&= (-k^2+\mu_0\varepsilon_0\omega^2+i\mu_0\omega\sigma_{XX})(-k^2+\mu_0\varepsilon_0\omega^2+i\mu_0\omega\sigma_{YY})(\mu_0\varepsilon_0\omega^2+i\mu_0\omega\sigma_{ZZ}) && (1.73)\\
&\quad -(-k^2+\mu_0\varepsilon_0\omega^2+i\mu_0\omega\sigma_{XX})(i\mu_0\omega\sigma_{YZ})(i\mu_0\omega\sigma_{ZY}) && (1.74)\\
&\quad -(-k^2+\mu_0\varepsilon_0\omega^2+i\mu_0\omega\sigma_{YY})(i\mu_0\omega\sigma_{XZ})(i\mu_0\omega\sigma_{ZX}) && (1.75)\\
&\quad -(\mu_0\varepsilon_0\omega^2+i\mu_0\omega\sigma_{ZZ})(i\mu_0\omega\sigma_{XY})(i\mu_0\omega\sigma_{YX}) && (1.76)\\
&\quad +(i\mu_0\omega\sigma_{XY})(i\mu_0\omega\sigma_{YZ})(i\mu_0\omega\sigma_{ZX}) && (1.77)\\
&\quad +(i\mu_0\omega\sigma_{XZ})(i\mu_0\omega\sigma_{YX})(i\mu_0\omega\sigma_{ZY}) && (1.78)\\
&= 0 && (1.79)
\end{aligned}$$

として、k^2 を求めればよい。

1.2 磁場に関する波動方程式の導出

$$\nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1.80}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{E}+\epsilon_0\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{1.81}$$

左から回転を取って、互いの式を代入する。波動の波長や周期に対して導電率の変化は非常に小さいと仮定を用いる。

$$\begin{aligned}
\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{B} &= \mu_0\nabla\times(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{E})+\mu_0\varepsilon_0\cdot\frac{\partial\nabla\times\boldsymbol{E}}{\partial t}\\
&= \mu_0\nabla\times\begin{pmatrix}\sigma_{XX}E_X+\sigma_{XY}E_Y+\sigma_{XZ}E_Z\\ \sigma_{YX}E_X+\sigma_{YY}E_Y+\sigma_{YZ}E_Z\\ \sigma_{ZX}E_X+\sigma_{ZY}E_Y+\sigma_{ZZ}E_Z\end{pmatrix}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\nabla\times\boldsymbol{E}}{\partial t}\\
&= \mu_0\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial X} & \frac{\partial}{\partial Y} & \frac{\partial}{\partial Z}\\ \sigma_{XX}E_X+\sigma_{XY}E_Y+\sigma_{XZ}E_Z & \sigma_{YX}E_X+\sigma_{YY}E_Y+\sigma_{YZ}E_Z & \sigma_{ZX}E_X+\sigma_{ZY}E_Y+\sigma_{ZZ}E_Z\end{vmatrix}+\mu_0\\
&= \mu_0\begin{pmatrix}\left(\sigma_{ZX}\frac{\partial E_X}{\partial Y}+\sigma_{ZY}\frac{\partial E_Y}{\partial Y}+\sigma_{ZZ}\frac{\partial E_Z}{\partial Y}\right)-\left(\sigma_{YX}\frac{\partial E_X}{\partial Z}+\sigma_{YY}\frac{\partial E_Y}{\partial Z}+\sigma_{YZ}\frac{\partial E_Z}{\partial Z}\right)\\ \left(\sigma_{XX}\frac{\partial E_X}{\partial Z}+\sigma_{XY}\frac{\partial E_Y}{\partial Z}+\sigma_{XZ}\frac{\partial E_Z}{\partial Z}\right)-\left(\sigma_{ZX}\frac{\partial E_X}{\partial X}+\sigma_{ZY}\frac{\partial E_Y}{\partial X}+\sigma_{ZZ}\frac{\partial E_Z}{\partial X}\right)\\ \left(\sigma_{YX}\frac{\partial E_X}{\partial X}+\sigma_{YY}\frac{\partial E_Y}{\partial X}+\sigma_{YZ}\frac{\partial E_Z}{\partial X}\right)-\left(\sigma_{XX}\frac{\partial E_X}{\partial Y}+\sigma_{XY}\frac{\partial E_Y}{\partial Y}+\sigma_{XZ}\frac{\partial E_Z}{\partial Y}\right)\end{pmatrix}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\nabla\times\boldsymbol{E}}{\partial t}
\end{aligned}$$

ここで、$\nabla\times(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{E})=\boldsymbol{\sigma}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})$ となってくれない。波数ベクトルの方向を Z 方向のみに限定する。

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{B} = \mu_0\begin{pmatrix}-ik\left(\sigma_{YX}E_X+\sigma_{YY}E_Y+\sigma_{YZ}E_Z\right)\\ ik\left(\sigma_{XX}E_X+\sigma_{XY}E_Y+\sigma_{XZ}E_Z\right)\\ 0\end{pmatrix}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2} \tag{1.86}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1.87}$$

$$i\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{E} = i\omega \boldsymbol{B} \tag{1.88}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ik \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\omega B_X \\ i\omega B_Y \\ i\omega B_Z \end{pmatrix} \tag{1.89}$$

$$\begin{pmatrix} -ikE_Y \\ ikE_X \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i\omega B_X \\ i\omega B_Y \\ i\omega B_Z \end{pmatrix} \tag{1.90}$$

E_Z を $\boldsymbol{B}$ で表す手段がなく、行き詰る。

それでは、$\nabla \times \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{E} + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ から、$\boldsymbol{E}$ の成分を出すことを試みるが、うまくいかない。

1.3 静電波の場合

静電波の場合、電場は $\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t) = -\nabla \phi_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t)$ であるので、これをマックスウェル方程式に代入すると、

$$0 = -\frac{\partial \boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} \tag{1.91}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t) = \mu_0 \boldsymbol{J}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \left(-\nabla \phi_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t)\right)}{\partial t} \tag{1.92}$$

$$\nabla \cdot \left(-\nabla \phi_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t)\right) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int \nabla \cdot \boldsymbol{J}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t) \mathrm{d}t \tag{1.93}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t) = 0 \tag{1.94}$$

第１式から $\boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t) = \boldsymbol{0}$ がいえる。この場合、第４式は意味がなくなる。第２式と第３式が意味のある式になる。

$$0 = \mu_0 \boldsymbol{J}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t) + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \left(-\nabla \phi_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t)\right)}{\partial t} \tag{1.95}$$

$$\nabla \cdot \left(-\nabla \phi_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t)\right) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int \nabla \cdot \boldsymbol{J}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t) \mathrm{d}t \tag{1.96}$$

この第１式に発散を取って時間積分すると第２式に一致するので、第１式と第２式は同じ事を表していると言える。

$\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t)$ と $\boldsymbol{J}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t)$ が波動であり、さらに、$\boldsymbol{J}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t)$ が電場ベクトルと導電率テンソルとの積とで表すことができる場合、第２式は、

$$\nabla \cdot \left(-\nabla \phi(\boldsymbol{r}, t)\right) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \left(-\nabla \phi(\boldsymbol{r}, t)\right) \mathrm{d}t \tag{1.97}$$

$$i\boldsymbol{k} \cdot \left(-i\boldsymbol{k} \phi(\boldsymbol{r}, t)\right) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{1}{-i\omega} i\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \left(-i\boldsymbol{k} \phi(\boldsymbol{r}, t)\right) \tag{1.98}$$

$$\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{k} \phi(\boldsymbol{r}, t) - i\omega \varepsilon_0 k^2 \phi(\boldsymbol{r}, t) = 0 \tag{1.99}$$

これが、静電波の分散式である。

特に、波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ が Z 方向を向いている場合は、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{k} &= \begin{pmatrix}0\\0\\k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sigma_{XX} & \sigma_{XY} & \sigma_{XZ}\\ \sigma_{YX} & \sigma_{YY} & \sigma_{YZ}\\ \sigma_{ZX} & \sigma_{ZY} & \sigma_{ZZ}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\k\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}0\\0\\k\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}?\\?\\k\sigma_{ZZ}\end{pmatrix}\\
&= k^2\sigma_{ZZ} \qquad (1.100)
\end{aligned}
$$

であるので、分散式は、

$$k^2\sigma_{ZZ}\phi(\boldsymbol{r},t) - i\omega\varepsilon_0 k^2\phi(\boldsymbol{r},t) = 0 \qquad (1.101)$$

$$\sigma_{ZZ} - i\omega\varepsilon_0 = 0 \qquad (1.102)$$

となる。教科書に載っている分散式を導くことができた。

第2章　電磁波のエネルギーについて

2.1　エネルギー収支

マックスウェル方程式の電磁誘導の式に $\boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}/\mu_0$ を内積したものから、アンペールの法則の式に $\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}/\mu_0$ を内積したものを引く。

$$\left(\nabla\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}+\frac{\partial\boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}}{\partial t}\right)\cdot\frac{\boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}}{\mu_0}-\left(\nabla\times\boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}-\mu_0\boldsymbol{J}_{\mathrm{g}}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}}{\partial t}\right)\cdot\frac{\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}}{\mu_0} \tag{2.1}$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}^2+\frac{\varepsilon_0}{2}\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}^2\right)+\frac{1}{\mu_0}\left\{(\nabla\times\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}})\cdot\boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}-(\nabla\times\boldsymbol{B}_{\mathrm{g}})\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}\right\}+\boldsymbol{J}_{\mathrm{g}}\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}} \tag{2.2}$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}^2+\frac{\varepsilon_0}{2}\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}^2\right)+\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}\times\boldsymbol{B}_{\mathrm{g}})+\boldsymbol{J}_{\mathrm{g}}\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}} \tag{2.3}$$

$$=0 \tag{2.4}$$

すなわち、

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}^2+\frac{\varepsilon_0}{2}\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}^2\right)+\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}\times\boldsymbol{B}_{\mathrm{g}})+\boldsymbol{J}_{\mathrm{g}}\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}=0} \tag{2.5}$$

2.2　プラズマ加熱基礎論の式を導く

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\Re\left[\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\exp\{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\}\right] \tag{2.6}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\exp\{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\}+\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\exp\{-i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\}\right] \tag{2.7}$$

とする。

誘電率テンソル $\boldsymbol{K}$ を用いて、電束密度ベクトルを表すと、

$$\bar{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{r},t)\exp\{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\} \tag{2.8}$$

$$=\int\mathrm{d}\boldsymbol{q}\mathrm{d}\Omega\varepsilon_0\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q},\omega+\Omega)\cdot\bar{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{q},\Omega)\exp\{i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{r}-i(\omega+\Omega)t\} \tag{2.9}$$

$$\cong\int\mathrm{d}\boldsymbol{q}\mathrm{d}\Omega\varepsilon_0\left\{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)+\boldsymbol{q}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)+\Omega\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{q},\Omega)\exp\{i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{r}-i(\omega+\Omega)t\} \tag{2.10}$$

$$=\varepsilon_0\exp\{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-i\omega t\}\int\mathrm{d}\boldsymbol{q}\mathrm{d}\Omega\left\{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)+\boldsymbol{q}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)+\Omega\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{q},\Omega)\exp\{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}-i\Omega t\} \tag{2.11}$$

$$=\varepsilon_0\exp\{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\}\left\{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)-i\left(\nabla\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\right)\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)+i\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\} \tag{2.12}$$

電束密度の時間微分は、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\bar{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{r},t)\exp\{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\}\right] \tag{2.13}$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\mathrm{d}\Omega\varepsilon_0\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q},\omega+\Omega)\cdot\bar{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{q},\Omega)\exp\{i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{r}-i(\omega+\Omega)t\} \tag{2.14}$$

$$=-i(\omega+\Omega)\varepsilon_0\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\mathrm{d}\Omega\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q},\omega+\Omega)\cdot\bar{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{q},\Omega)\exp\{i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{r}-i(\omega+\Omega)t\} \tag{2.15}$$

$$\cong\varepsilon_0\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\mathrm{d}\Omega\left\{-i(\omega+\Omega)\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)-i(\omega+\Omega)\boldsymbol{q}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)-i(\omega+\Omega)\Omega\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{q},\Omega)\exp\{i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{r}-i(\omega+\Omega)t\} \tag{2.16}$$

$$=\varepsilon_0\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\mathrm{d}\Omega\left\{-i(\omega+\Omega)\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)-i\boldsymbol{q}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}(\omega+\Omega)\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)-i(\omega+\Omega)\Omega\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{q},\Omega)\exp\{i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{r}-i(\omega+\Omega)t\} \tag{2.17}$$

$$\cong\varepsilon_0\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\mathrm{d}\Omega\left\{-i(\omega+\Omega)\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)-i\boldsymbol{q}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\omega\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)-i\omega\Omega\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{q},\Omega)\exp\{i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{r}-i(\omega+\Omega)t\} \tag{2.18}$$

$$=\varepsilon_0\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\mathrm{d}\Omega\left\{-i\omega\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)-i\boldsymbol{q}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\omega\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)-i\Omega\left(\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)+\omega\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)\right)\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{q},\Omega)\exp\{i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{r}-i(\omega+\Omega)t\} \tag{2.19}$$

$$=\varepsilon_0\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\mathrm{d}\Omega\left\{-i\omega\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)-i\boldsymbol{q}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\omega\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)-i\Omega\frac{\partial}{\partial\omega}\omega\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{q},\Omega)\exp\{i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{r}-i(\omega+\Omega)t\} \tag{2.20}$$

$$=\varepsilon_0\exp\{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-i\omega t\}\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\mathrm{d}\Omega\left\{-i\omega\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)-i\boldsymbol{q}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\omega\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)-i\Omega\frac{\partial}{\partial\omega}\omega\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{q},\Omega)\exp\{i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{r}-i\Omega t\} \tag{2.21}$$

$$=\varepsilon_0\exp\{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-i\omega t\}\left\{-i\omega\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)-\frac{\partial\omega\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\boldsymbol{k}}\cdot\nabla+\frac{\partial\omega\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\omega}\frac{\partial}{\partial t}\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t) \tag{2.22}$$

途中、$\boldsymbol{q}(\omega+\Omega)\cong\boldsymbol{q}\omega$、$\Omega(\omega+\Omega)\cong\Omega\omega$ の近似を用いた。

マックスウェルの方程式は、

$$\begin{cases}\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\dfrac{\partial\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=\boldsymbol{0}\\ \nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)-\mu_0\dfrac{\partial\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=\mu_0\boldsymbol{J}_{\mathrm{ex}}(\boldsymbol{r},t)\end{cases} \tag{2.23}$$

へ、$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)=\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\exp\{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\}$、$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)=\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)\exp\{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\}$、及び、(2.22) 式を代入する。ベクトル公式、$\nabla\times(\phi\boldsymbol{A})=\nabla\phi\times\boldsymbol{A}+\phi\nabla\times\boldsymbol{A}$ を用いる。第 1 式は、

$$\nabla\times\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\exp\{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\}+\frac{\partial\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)\exp\{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\}}{\partial t}=\boldsymbol{0} \tag{2.24}$$

$$\begin{aligned}&(i\boldsymbol{k}\exp\{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\})\times\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)+\exp\{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\}\nabla\times\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\\ &-i\omega\exp\{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\}\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)+\exp\{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\}\frac{\partial\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=\boldsymbol{0}\end{aligned} \tag{2.25}$$

$$i\boldsymbol{k}\times\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)+\nabla\times\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)-i\omega\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)+\frac{\partial\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=\boldsymbol{0} \tag{2.26}$$

となり、第２式は、

$$\nabla\times\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)\exp\{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\}-\mu_0\frac{\partial\bar{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{r},t)\exp\{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\}}{\partial t}=\mu_0\boldsymbol{J}_{\rm ex}(\boldsymbol{r},t) \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned}&(i\boldsymbol{k}\exp\{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\})\times\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)+\exp\{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\}\nabla\times\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)\\ &-\mu_0\left[\varepsilon_0\exp\{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-i\omega t\}\left\{-i\omega\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)-\frac{\partial\omega\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\boldsymbol{k}}\cdot\nabla+\frac{\partial\omega\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\omega}\frac{\partial}{\partial t}\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right]=\mu_0\boldsymbol{J}_{\rm ex}(\boldsymbol{r},t)\end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned}&i\boldsymbol{k}\times\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)+\nabla\times\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)\\ &+\mu_0\varepsilon_0\left\{i\omega\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)+\frac{\partial\omega\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\boldsymbol{k}}\cdot\nabla-\frac{\partial\omega\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\omega}\frac{\partial}{\partial t}\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)=\mu_0\bar{\boldsymbol{J}}_{\rm ex}(\boldsymbol{r},t)\end{aligned} \tag{2.29}$$

となる。ただし、$\boldsymbol{J}_{\rm ex}(\boldsymbol{r},t)=\bar{\boldsymbol{J}}_{\rm ex}(\boldsymbol{r},t)\exp\{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-i\omega t\}$ とした。

誘電率テンソルのエルミート成分が反エルミート成分より十分大きいとし、外部電流は十分小さいとして、０次の式は、

$$\begin{cases}\boldsymbol{k}\times\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)-\omega\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{k}\times\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)+\mu_0\varepsilon_0\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{0}\end{cases} \tag{2.30}$$

１次の式は、

$$\begin{cases}\nabla\times\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)+\dfrac{\partial\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=\boldsymbol{0}\\ \nabla\times\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)+\mu_0\varepsilon_0\left\{-\omega\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k},\omega)+\dfrac{\partial\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\boldsymbol{k}}\cdot\nabla-\dfrac{\partial\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\omega}\dfrac{\partial}{\partial t}\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)=\mu_0\bar{\boldsymbol{J}}_{\rm ex}(\boldsymbol{r},t)\end{cases} \tag{2.31}$$

$\boldsymbol{E}_0\exp\{i(\boldsymbol{k}_r+i\boldsymbol{k}_i)\cdot\boldsymbol{r}-i(\omega_r+i\omega_i)t\}$ という形になっている場合は、０次の式は、

$$\begin{cases}\boldsymbol{k}_r\times\boldsymbol{E}_0-\omega_r\boldsymbol{B}_0=\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{k}_r\times\boldsymbol{B}_0+\mu_0\varepsilon_0\omega_r\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{0}\end{cases} \tag{2.32}$$

１次の式は、

$$\begin{cases}-\boldsymbol{k}_i\times\boldsymbol{E}_0+\omega_i\boldsymbol{B}_0=\boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{k}_i\times\boldsymbol{B}_0-\mu_0\varepsilon_0\left\{(\omega_r\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r))+\boldsymbol{k}_i\cdot\dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}(\omega_r\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r))+\omega_i\dfrac{\partial}{\partial\omega}(\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega))\Big|_{\omega=\omega_r}\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{0}\end{cases} \tag{2.33}$$

(2.31) 式の第１式に $\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)$ によるスカラー積を、第２式の複素共役に $\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)$ によるスカラー積をとると、

$$\begin{cases}\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot(\nabla\times\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t))+\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\dfrac{\partial\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=\boldsymbol{0}\\ \bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\cdot(\nabla\times\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t))-\mu_0\varepsilon_0\omega\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{K}_A^*(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\\ +\mu_0\varepsilon_0\sum_k\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\left\{\dfrac{\partial\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial k_k}\right\}^*\cdot\dfrac{\partial}{\partial r_k}\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)-\mu_0\varepsilon_0\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\left\{\dfrac{\partial\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\omega}\right\}^*\cdot\dfrac{\partial}{\partial t}\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\\ =\mu_0\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\bar{\boldsymbol{J}}_{\rm ex}^*(\boldsymbol{r},t)\end{cases} \tag{2.34}$$

ただし、$k_1 = k_X$, $k_2 = k_Y$, $k_3 = k_Z$, $r_1 = X$, $r_2 = Y$, $r_3 = Z$ としている。辺々差し引くと、

$$\begin{aligned}
&\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot(\nabla\times\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)) - \bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\cdot(\nabla\times\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)) + \bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\frac{\partial\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\\
&-\mu_0\varepsilon_0\sum_k \bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\left\{\frac{\partial\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial k_k}\right\}^*\cdot\frac{\partial}{\partial r_k}\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t) + \mu_0\varepsilon_0\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\left\{\frac{\partial\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\omega}\right\}^*\cdot\frac{\partial}{\partial t}\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\\
&+\mu_0\varepsilon_0\omega\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{K}_A^*(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t) + \mu_0\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\bar{\boldsymbol{J}}_{\rm ex}^*(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{0}
\end{aligned} \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}
&\nabla\cdot\big(\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\times\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\big) + \bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\frac{\partial\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\\
&-\mu_0\varepsilon_0\sum_k \bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\left\{\frac{\partial\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial k_k}\right\}^*\cdot\frac{\partial}{\partial r_k}\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t) + \mu_0\varepsilon_0\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\left\{\frac{\partial\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\omega}\right\}^*\cdot\frac{\partial}{\partial t}\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\\
&+\mu_0\varepsilon_0\omega\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{K}_A^*(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t) + \mu_0\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\bar{\boldsymbol{J}}_{\rm ex}^*(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{0}
\end{aligned} \tag{2.36}$$

途中、ベクトル公式 $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$ を用いた。

この式の複素共役と足し合わせると、

$$\begin{aligned}
&\nabla\cdot\big(\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\times\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\big) + \nabla\cdot\big(\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\times\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)\big) + \bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\frac{\partial\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} + \bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\frac{\partial\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\\
&-\mu_0\varepsilon_0\sum_k \bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\left\{\frac{\partial\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial k_k}\right\}^*\cdot\frac{\partial}{\partial r_k}\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t) - \mu_0\varepsilon_0\sum_k \bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\frac{\partial\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial k_k}\cdot\frac{\partial}{\partial r_k}\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\\
&+\mu_0\varepsilon_0\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\left\{\frac{\partial\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\omega}\right\}^*\cdot\frac{\partial}{\partial t}\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t) + \mu_0\varepsilon_0\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\frac{\partial\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\\
&+\mu_0\varepsilon_0\omega\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{K}_A^*(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t) + \mu_0\varepsilon_0\omega\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\\
&+\mu_0\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\bar{\boldsymbol{J}}_{\rm ex}^*(\boldsymbol{r},t) + \mu_0\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\bar{\boldsymbol{J}}_{\rm ex}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{0}
\end{aligned} \tag{2.37}$$

$$\left\{\begin{aligned}
\left\{\frac{\partial\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial k_k}\right\}^* &= \frac{\partial\left\{\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)\right\}^*}{\partial k_k}\\
\left\{\frac{\partial\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\omega}\right\}^* &= \frac{\partial\left\{\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)\right\}^*}{\partial\omega}
\end{aligned}\right. \tag{2.38}$$

であると仮定すると（証明してない)、

$$\begin{aligned}
&\nabla\cdot\big(\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\times\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\big) + \nabla\cdot\big(\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\times\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)\big) + \bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\frac{\partial\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} + \bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\frac{\partial\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\\
&-\mu_0\varepsilon_0\sum_k \bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\frac{\partial\left\{\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)\right\}^*}{\partial k_k}\cdot\frac{\partial}{\partial r_k}\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t) - \mu_0\varepsilon_0\sum_k \bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\frac{\partial\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial k_k}\cdot\frac{\partial}{\partial r_k}\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\\
&+\mu_0\varepsilon_0\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\frac{\partial\left\{\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)\right\}^*}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t) + \mu_0\varepsilon_0\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\frac{\partial\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\\
&+\mu_0\varepsilon_0\omega\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{K}_A^*(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t) + \mu_0\varepsilon_0\omega\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\\
&+\mu_0\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\bar{\boldsymbol{J}}_{\rm ex}^*(\boldsymbol{r},t) + \mu_0\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\bar{\boldsymbol{J}}_{\rm ex}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{0}
\end{aligned} \tag{2.39}$$

$\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)$ と $\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k},\omega)$ がエルミートテンソルであり、エルミートテンソルの性質、

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{H}^*\cdot\boldsymbol{b} = \sum_{k,l} a_k H^*_{kl} b_l \tag{2.40}$$

$$= \sum_{k,l} a_k H_{lk} b_l \tag{2.41}$$

$$= \sum_{k,l} b_l H_{lk} a_k \tag{2.42}$$

$$= \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{a} \tag{2.43}$$

を利用すると、

$$\begin{aligned}
&\nabla\cdot\left(\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\times\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\right)+\nabla\cdot\left(\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\times\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)\right)+\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\frac{\partial\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}+\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\frac{\partial\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\\
&-\mu_0\varepsilon_0\sum_k\frac{\partial}{\partial r_k}\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\frac{\partial\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial k_k}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)-\mu_0\varepsilon_0\sum_k\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\frac{\partial\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial k_k}\cdot\frac{\partial}{\partial r_k}\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\\
&+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\frac{\partial\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\omega}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)+\mu_0\varepsilon_0\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\frac{\partial\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\\
&+\mu_0\varepsilon_0\omega\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)+\mu_0\varepsilon_0\omega\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\\
&+\mu_0\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\bar{\boldsymbol{J}}^*_{\mathrm{ex}}(\boldsymbol{r},t)+\mu_0\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{ex}}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{0}
\end{aligned} \tag{2.44}$$

$$\nabla\cdot\left\{\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\times\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)+\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\times\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)\right\}+\frac{\partial}{\partial t}\left\{\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)\right\} \tag{2.45}$$

$$\begin{aligned}
&-\mu_0\varepsilon_0\sum_k\frac{\partial}{\partial r_k}\left\{\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\frac{\partial\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial k_k}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left\{\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\frac{\partial\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\omega}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\\
&+2\mu_0\varepsilon_0\omega\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)+\mu_0\left\{\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\bar{\boldsymbol{J}}^*_{\mathrm{ex}}(\boldsymbol{r},t)+\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{ex}}(\boldsymbol{r},t)\right\}=\boldsymbol{0}
\end{aligned} \tag{2.46}$$

$$\nabla\cdot\left\{\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\times\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)+\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\times\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)\right\}+\frac{\partial}{\partial t}\left\{\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)\right\} \tag{2.47}$$

$$\begin{aligned}
&-\mu_0\varepsilon_0\sum_k\frac{\partial}{\partial r_k}\sum_{l,m}\left\{\frac{\partial\omega K_{Hlm}(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial k_k}\bar{E}_m(\boldsymbol{r},t)\bar{E}^*_l(\boldsymbol{r},t)\right\}+\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left\{\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\frac{\partial\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\omega}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\\
&+2\mu_0\varepsilon_0\omega\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)+\mu_0\left\{\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\bar{\boldsymbol{J}}^*_{\mathrm{ex}}(\boldsymbol{r},t)+\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{ex}}(\boldsymbol{r},t)\right\}=\boldsymbol{0}
\end{aligned} \tag{2.48}$$

$$\begin{cases}
\boldsymbol{S}=\dfrac{1}{4\mu_0}\left\{\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\times\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)+\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\times\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)\right\}-\dfrac{1}{4}\varepsilon_0\sum_{l,m}\left\{\dfrac{\partial\omega K_{Hlm}(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\boldsymbol{k}}\bar{E}_m(\boldsymbol{r},t)\bar{E}^*_l(\boldsymbol{r},t)\right\}\\
W=\dfrac{1}{4\mu_0}\left\{\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)\right\}+\dfrac{1}{4}\varepsilon_0\left\{\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\dfrac{\partial\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\omega}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\\
Q=\dfrac{1}{2}\varepsilon_0\omega\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\\
Q_{\mathrm{ex}}=-\dfrac{1}{4}\left\{\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\bar{\boldsymbol{J}}^*_{\mathrm{ex}}(\boldsymbol{r},t)+\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{ex}}(\boldsymbol{r},t)\right\}
\end{cases} \tag{2.49}$$

とした場合、

$$\frac{\partial W}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{S}+Q=Q_{\mathrm{ex}} \tag{2.50}$$

が得られる。

2.2.0.0.1 $\boldsymbol{E}_0\exp\{i(\boldsymbol{k}_r+i\boldsymbol{k}_i)\cdot\boldsymbol{r}-i(\omega_r+i\omega_i)t\}$ という形になっている場合 外部駆動力も 0 とする。

$$\begin{aligned}
&\bar{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{r},t)\exp\{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\} && (2.51)\\
=&\varepsilon_0\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r+i\boldsymbol{k}_i,\omega_r+i\omega_i)\cdot\boldsymbol{E}_0\exp\{i(\boldsymbol{k}_r+i\boldsymbol{k}_i)\cdot\boldsymbol{r}-i(\omega_r+i\omega_i)t\} && (2.52)\\
\cong&\varepsilon_0\left\{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\exp\{i(\boldsymbol{k}_r+i\boldsymbol{k}_i)\cdot\boldsymbol{r}-i(\omega_r+i\omega_i)t\} && (2.53)
\end{aligned}$$

電束密度の時間微分は、

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\bar{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{r},t)\exp\{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\} && (2.54)\\
\cong&\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_0\left\{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\\
&\exp\{i(\boldsymbol{k}_r+i\boldsymbol{k}_i)\cdot\boldsymbol{r}-i(\omega_r+i\omega_i)t\} && (2.55)\\
=&\varepsilon_0\left\{(-i(\omega_r+i\omega_i))\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i(-i(\omega_r+i\omega_i))\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right.\\
&\left.+i(-i(\omega_r+i\omega_i))\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\exp\{i(\boldsymbol{k}_r+i\boldsymbol{k}_i)\cdot\boldsymbol{r}-i(\omega_r+i\omega_i)t\} && (2.56)\\
\cong&\varepsilon_0\left\{-i\omega_r\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+\omega_i\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+\omega_r\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right.\\
&\left.+\omega_r\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\exp\{i(\boldsymbol{k}_r+i\boldsymbol{k}_i)\cdot\boldsymbol{r}-i(\omega_r+i\omega_i)t\} && (2.57)\\
=&\varepsilon_0\left\{-i\left(\omega_r\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right)+\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\left(\omega_r\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right)\right.\\
&\left.+\omega_i\left(\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+\omega_r\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\exp\{i(\boldsymbol{k}_r+i\boldsymbol{k}_i)\cdot\boldsymbol{r}-i(\omega_r+i\omega_i)t\} && (2.58)\\
=&\varepsilon_0\left\{-i\left(\omega_r\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right)+\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\left(\omega_r\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right)\right.\\
&\left.+\omega_i\left.\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega)\right)\right|_{\omega=\omega_r}\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\exp\{i(\boldsymbol{k}_r+i\boldsymbol{k}_i)\cdot\boldsymbol{r}-i(\omega_r+i\omega_i)t\} && (2.59)
\end{aligned}$$

マックスウェルの方程式は、

$$\begin{cases}\nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\dfrac{\partial\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=\boldsymbol{0}\\ \nabla\times\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)-\mu_0\dfrac{\partial\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=\mu_0\boldsymbol{J}_{\mathrm{ex}}(\boldsymbol{r},t)\end{cases} \tag{2.60}$$

であるが、第１式は、

$$i(\boldsymbol{k}_r+i\boldsymbol{k}_i)\times\boldsymbol{E}_0\exp\{i(\boldsymbol{k}_r+i\boldsymbol{k}_i)\cdot\boldsymbol{r}-i(\omega_r+i\omega_i)t\}$$
$$-i(\omega_r+i\omega_i)\boldsymbol{B}_0\exp\{i(\boldsymbol{k}_r+i\boldsymbol{k}_i)\cdot\boldsymbol{r}-i(\omega_r+i\omega_i)t\}=\boldsymbol{0} \tag{2.61}$$
$$i\boldsymbol{k}_r\times\boldsymbol{E}_0-\boldsymbol{k}_i\times\boldsymbol{E}_0-i\omega_r\boldsymbol{B}_0+\omega_i\boldsymbol{B}_0=\boldsymbol{0} \tag{2.62}$$

第２式は、

$$i(\boldsymbol{k}_r+i\boldsymbol{k}_i)\times\boldsymbol{B}_0\exp\{i(\boldsymbol{k}_r+i\boldsymbol{k}_i)\cdot\boldsymbol{r}-i(\omega_r+i\omega_i)t\}$$
$$-\mu_0\varepsilon_0\left\{-i\left(\omega_r\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right)+\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\left(\omega_r\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right)+\omega_i\left.\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega)\right)\right|_{\omega=\omega_r}\right\}$$
$$\cdot\boldsymbol{E}_0\exp\{i(\boldsymbol{k}_r+i\boldsymbol{k}_i)\cdot\boldsymbol{r}-i(\omega_r+i\omega_i)t\}=\boldsymbol{0} \tag{2.63}$$
$$i\boldsymbol{k}_r\times\boldsymbol{B}_0-\boldsymbol{k}_i\times\boldsymbol{B}_0$$
$$-\mu_0\varepsilon_0\left\{-i\left(\omega_r\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right)+\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\left(\omega_r\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right)+\omega_i\left.\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega)\right)\right|_{\omega=\omega_r}\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{0} \tag{2.64}$$

誘電率テンソルのエルミート成分が反エルミート成分より十分大きいとし、外部電流は十分小さいとして、０次の式は、

$$\begin{cases}\boldsymbol{k}_r\times\boldsymbol{E}_0-\omega_r\boldsymbol{B}_0=\boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{k}_r\times\boldsymbol{B}_0+\mu_0\varepsilon_0\omega_r\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{0}\end{cases} \tag{2.65}$$

１次の式は、

$$\begin{cases}-\boldsymbol{k}_i\times\boldsymbol{E}_0+\omega_i\boldsymbol{B}_0=\boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{k}_i\times\boldsymbol{B}_0-\mu_0\varepsilon_0\left\{\omega_r\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\left(\omega_r\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right)+\omega_i\left.\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega)\right)\right|_{\omega=\omega_r}\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{0}\end{cases} \tag{2.66}$$

第１式に $\boldsymbol{B}_0^*$ を、第２式の複素共役に $\boldsymbol{E}_0$ を内積する。

$$\begin{cases}-\boldsymbol{B}_0^*\cdot\boldsymbol{k}_i\times\boldsymbol{E}_0+\omega_i\boldsymbol{B}_0^*\cdot\boldsymbol{B}_0=\boldsymbol{0}\\ -\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{k}_i\times\boldsymbol{B}_0^*-\mu_0\varepsilon_0\omega_r\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{K}_A^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0^*-\mu_0\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{k}_i\cdot\left\{\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\left(\omega_r\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right)\right\}^*\cdot\boldsymbol{E}_0^*\\ -\mu_0\varepsilon_0\omega_i\boldsymbol{E}_0\cdot\left\{\left.\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega)\right)\right|_{\omega=\omega_r}\right\}^*\cdot\boldsymbol{E}_0^*=\boldsymbol{0}\end{cases} \tag{2.67}$$

両社の引き算をする。途中、スカラー３重積の公式 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})$ を用いる。

$$-\boldsymbol{B}_0^*\cdot\boldsymbol{k}_i\times\boldsymbol{E}_0+\omega_i\boldsymbol{B}_0^*\cdot\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{k}_i\times\boldsymbol{B}_0^*+\mu_0\varepsilon_0\omega_r\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{K}_A^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0^*$$
$$+\mu_0\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{k}_i\cdot\left\{\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\left(\omega_r\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right)\right\}^*\cdot\boldsymbol{E}_0^*+\mu_0\varepsilon_0\omega_i\boldsymbol{E}_0\cdot\left\{\left.\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega)\right)\right|_{\omega=\omega_r}\right\}^*\cdot\boldsymbol{E}_0^*=\boldsymbol{0} \tag{2.68}$$
$$-2\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{B}_0^*+\omega_i\boldsymbol{B}_0^*\cdot\boldsymbol{B}_0+\mu_0\varepsilon_0\omega_r\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{K}_A^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0^*$$
$$+\mu_0\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{k}_i\cdot\left\{\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\left(\omega_r\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right)\right\}^*\cdot\boldsymbol{E}_0^*+\mu_0\varepsilon_0\omega_i\boldsymbol{E}_0\cdot\left\{\left.\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega)\right)\right|_{\omega=\omega_r}\right\}^*\cdot\boldsymbol{E}_0^*=\boldsymbol{0} \tag{2.69}$$

この式の複素共役と足し合わせる。なお、(2.38) 式が成り立っていると仮定する。

$$
\begin{aligned}
&-2\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{B}_0^*-2\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{E}_0^*\times\boldsymbol{B}_0+\omega_i\boldsymbol{B}_0^*\cdot\boldsymbol{B}_0+\omega_i\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{B}_0^*\\
&+\mu_0\varepsilon_0\omega_r\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{K}_A^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0^*+\mu_0\varepsilon_0\omega_r\boldsymbol{E}_0^*\cdot\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\\
&+\mu_0\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{k}_i\cdot\left\{\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\left(\omega_r\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right)\right\}^*\cdot\boldsymbol{E}_0^*+\mu_0\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0^*\cdot\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\left(\omega_r\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right)\cdot\boldsymbol{E}_0\\
&+\mu_0\varepsilon_0\omega_i\boldsymbol{E}_0\cdot\left\{\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega)\right)\Big|_{\omega=\omega_r}\right\}^*\cdot\boldsymbol{E}_0^*+\mu_0\varepsilon_0\omega_i\boldsymbol{E}_0^*\cdot\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega)\right)\Big|_{\omega=\omega_r}\cdot\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{0}
\end{aligned}
\tag{2.70}
$$

$$
\begin{aligned}
&-2\boldsymbol{k}_i\cdot(\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{B}_0^*+\boldsymbol{E}_0^*\times\boldsymbol{B}_0)+2\omega_i\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{B}_0^*+2\mu_0\varepsilon_0\omega_r\boldsymbol{E}_0^*\cdot\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\\
&+2\mu_0\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0^*\cdot\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\left(\omega_r\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right)\cdot\boldsymbol{E}_0+2\mu_0\varepsilon_0\omega_i\boldsymbol{E}_0^*\cdot\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega)\right)\Big|_{\omega=\omega_r}\cdot\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{0}
\end{aligned}
\tag{2.71}
$$

$$
\begin{aligned}
&-2\boldsymbol{k}_i\cdot(\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{B}_0^*+\boldsymbol{E}_0^*\times\boldsymbol{B}_0)+2\omega_i\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{B}_0^*+2\mu_0\varepsilon_0\omega_r\boldsymbol{E}_0^*\cdot\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\\
&+2\mu_0\varepsilon_0\sum_{k,l}\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\left(\omega_rK_{Hkl}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right)E_{0l}E_{0k}^*+2\mu_0\varepsilon_0\omega_i\boldsymbol{E}_0^*\cdot\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega)\right)\Big|_{\omega=\omega_r}\cdot\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{0}
\end{aligned}
\tag{2.72}
$$

$$
\begin{aligned}
&-2\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{1}{4}(\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{B}_0^*+\boldsymbol{E}_0^*\times\boldsymbol{B}_0)+2\omega_i\frac{1}{4}\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{B}_0^*+\frac{1}{2}\mu_0\varepsilon_0\omega_r\boldsymbol{E}_0^*\cdot\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\\
&+2\boldsymbol{k}_i\frac{1}{4}\mu_0\varepsilon_0\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\sum_{k,l}\left(\omega_rK_{Hkl}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right)E_{0l}E_{0k}^*+2\omega_i\frac{1}{4}\mu_0\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0^*\cdot\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega)\right)\Big|_{\omega=\omega_r}\cdot\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{0}
\end{aligned}
\tag{2.73}
$$

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{S}=\dfrac{1}{4\mu_0}(\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{B}_0^*+\boldsymbol{E}_0^*\times\boldsymbol{B}_0)-\dfrac{1}{4}\varepsilon_0\dfrac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\sum_{k,l}\left(\omega_rK_{Hkl}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right)E_{0l}E_{0k}^*\\
W=\dfrac{1}{4\mu_0}\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{B}_0^*+\dfrac{1}{4}\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0^*\cdot\dfrac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega)\right)\Big|_{\omega=\omega_r}\cdot\boldsymbol{E}_0\\
Q=\dfrac{1}{2}\varepsilon_0\omega_r\boldsymbol{E}_0^*\cdot\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0
\end{cases}
\tag{2.74}
$$

とした場合、

$$2\omega_iW-2\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{S}+Q=0 \tag{2.75}$$

が得られる。

2.2.0.0.2　さらに、近似しなかった場合　電束密度の時間微分は、

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{r},t)\exp\{i(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\} \tag{2.76}$$

$$
\begin{aligned}
\cong&\frac{\partial}{\partial t}\varepsilon_0\left\{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\\
&\exp\{i(\boldsymbol{k}_r+i\boldsymbol{k}_i)\cdot\boldsymbol{r}-i(\omega_r+i\omega_i)t\}
\end{aligned}
\tag{2.77}
$$

$$
\begin{aligned}
=&\varepsilon_0\left\{(-i(\omega_r+i\omega_i))\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i(-i(\omega_r+i\omega_i))\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right.\\
&\left.+i(-i(\omega_r+i\omega_i))\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\exp\{i(\boldsymbol{k}_r+i\boldsymbol{k}_i)\cdot\boldsymbol{r}-i(\omega_r+i\omega_i)t\}
\end{aligned}
\tag{2.78}
$$

$$
\begin{aligned}
=&\varepsilon_0\left\{(-i\omega_r+\omega_i)\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+(\omega_r+i\omega_i)\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right.\\
&\left.+(\omega_r+i\omega_i)\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\exp\{i(\boldsymbol{k}_r+i\boldsymbol{k}_i)\cdot\boldsymbol{r}-i(\omega_r+i\omega_i)t\}
\end{aligned}
\tag{2.79}
$$

マックスウェルの方程式は、

$$\begin{cases}\nabla \times \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) + \dfrac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = \boldsymbol{0} \\ \nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t) - \mu_0 \dfrac{\partial \boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} = \boldsymbol{0}\end{cases} \tag{2.80}$$

であるが、第１式は、

$$\begin{aligned} i(\boldsymbol{k}_r + i\boldsymbol{k}_i) \times \boldsymbol{E}_0 \exp\{i(\boldsymbol{k}_r + i\boldsymbol{k}_i)\cdot \boldsymbol{r} - i(\omega_r + i\omega_i)t\} \\ -i(\omega_r + i\omega_i)\boldsymbol{B}_0 \exp\{i(\boldsymbol{k}_r + i\boldsymbol{k}_i)\cdot \boldsymbol{r} - i(\omega_r + i\omega_i)t\} = \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{2.81}$$

$$i\boldsymbol{k}_r \times \boldsymbol{E}_0 - \boldsymbol{k}_i \times \boldsymbol{E}_0 - i\omega_r \boldsymbol{B}_0 + \omega_i \boldsymbol{B}_0 = \boldsymbol{0} \tag{2.82}$$

第２式は、

$$\begin{aligned} i(\boldsymbol{k}_r + i\boldsymbol{k}_i) \times \boldsymbol{B}_0 \exp\{i(\boldsymbol{k}_r + i\boldsymbol{k}_i)\cdot \boldsymbol{r} - i(\omega_r + i\omega_i)t\} \\ -\mu_0\varepsilon_0 \left\{(-i\omega_r + \omega_i)\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) + (\omega_r + i\omega_i)\boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right. \\ \left. +(\omega_r + i\omega_i)\omega_i \frac{\partial}{\partial \omega}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\} \cdot \boldsymbol{E}_0 \exp\{i(\boldsymbol{k}_r + i\boldsymbol{k}_i)\cdot \boldsymbol{r} - i(\omega_r + i\omega_i)t\} = \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{2.83}$$

$$\begin{aligned} i\boldsymbol{k}_r \times \boldsymbol{B}_0 - \boldsymbol{k}_i \times \boldsymbol{B}_0 - \mu_0\varepsilon_0 \left\{-i\omega_r \boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) + \omega_i \boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) + \omega_r \boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right. \\ \left. +i\omega_i \boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) + \omega_r\omega_i \frac{\partial}{\partial \omega}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) + i\omega_i\omega_i \frac{\partial}{\partial \omega}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\} \cdot \boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{2.84}$$

第１式に $\boldsymbol{B}_0^*$ を、第２式の複素共役に $\boldsymbol{E}_0$ を内積する。

$$\begin{cases} i\boldsymbol{B}_0^* \cdot \boldsymbol{k}_r \times \boldsymbol{E}_0 - \boldsymbol{B}_0^* \cdot \boldsymbol{k}_i \times \boldsymbol{E}_0 - i\omega_r \boldsymbol{B}_0^* \cdot \boldsymbol{B}_0 + \omega_i \boldsymbol{B}_0^* \cdot \boldsymbol{B}_0 = 0 \\ -i\boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{k}_r \times \boldsymbol{B}_0^* - \boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{k}_i \times \boldsymbol{B}_0^* - \mu_0\varepsilon_0 \boldsymbol{E}_0 \cdot \{i\omega_r \boldsymbol{K}^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) + \omega_i \boldsymbol{K}^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) \\ +\omega_r \boldsymbol{k}_i \cdot \left\{\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}^* - i\omega_i \boldsymbol{k}_i \cdot \left\{\dfrac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}^* \\ +\omega_r\omega_i \left\{\dfrac{\partial}{\partial \omega}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}^* - i\omega_i\omega_i \left\{\dfrac{\partial}{\partial \omega}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}^* \Bigg\} \cdot \boldsymbol{E}_0^* = 0 \end{cases} \tag{2.85}$$

両者の引き算をする。途中、スカラー３重積の公式 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{A})$ を用いる。

$$\begin{aligned} i\boldsymbol{B}_0^* \cdot \boldsymbol{k}_r \times \boldsymbol{E}_0 + i\boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{k}_r \times \boldsymbol{B}_0^* - \boldsymbol{B}_0^* \cdot \boldsymbol{k}_i \times \boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{k}_i \times \boldsymbol{B}_0^* - i\omega_r \boldsymbol{B}_0^* \cdot \boldsymbol{B}_0 + \omega_i \boldsymbol{B}_0^* \cdot \boldsymbol{B}_0 \\ +\mu_0\varepsilon_0 \boldsymbol{E}_0 \cdot \left\{i\omega_r \boldsymbol{K}^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) + \omega_i \boldsymbol{K}^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) + \omega_r \boldsymbol{k}_i \cdot \left\{\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}^*\right. \\ \left. -i\omega_i \boldsymbol{k}_i \cdot \left\{\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}^* + \omega_r\omega_i \left\{\frac{\partial}{\partial \omega}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}^* - i\omega_i\omega_i \left\{\frac{\partial}{\partial \omega}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}^*\right\} \cdot \boldsymbol{E}_0^* = 0 \end{aligned} \tag{2.86}$$

$$\begin{aligned} -2\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{E}_0 \times \boldsymbol{B}_0^* - i\omega_r \boldsymbol{B}_0^* \cdot \boldsymbol{B}_0 + \omega_i \boldsymbol{B}_0^* \cdot \boldsymbol{B}_0 \\ +\mu_0\varepsilon_0 \left\{i\omega_r \boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{K}^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) \cdot \boldsymbol{E}_0^* + \omega_i \boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{K}^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) \cdot \boldsymbol{E}_0^* + \omega_r \boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{k}_i \cdot \left\{\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}^* \cdot \boldsymbol{E}_0^*\right. \\ -i\omega_i \boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{k}_i \cdot \left\{\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}^* \cdot \boldsymbol{E}_0^* + \omega_r\omega_i \boldsymbol{E}_0 \cdot \left\{\frac{\partial}{\partial \omega}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}^* \cdot \boldsymbol{E}_0^* \\ \left. -i\omega_i\omega_i \boldsymbol{E}_0 \cdot \left\{\frac{\partial}{\partial \omega}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}^* \cdot \boldsymbol{E}_0^*\right\} = \boldsymbol{0} \end{aligned} \tag{2.87}$$

この式の複素共役と足し合わせる。

$$
\begin{aligned}
&-2\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{B}_0^*-2\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{E}_0^*\times\boldsymbol{B}_0+2\omega_i\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{B}_0^*\\
&+\mu_0\varepsilon_0\left\{i\omega_r\left(\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{K}^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0^*-\boldsymbol{E}_0^*\cdot\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\right)\right.\\
&+\omega_i\left(\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{K}^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0^*+\boldsymbol{E}_0^*\cdot\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\right)\\
&+\omega_r\sum_l\left(\boldsymbol{E}_0\cdot k_{li}\left\{\frac{\partial}{\partial k_l}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}^*\cdot\boldsymbol{E}_0^*+\boldsymbol{E}_0^*\cdot k_{li}\frac{\partial}{\partial k_l}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\right)\\
&-i\omega_i\sum_l\left(\boldsymbol{E}_0\cdot k_{li}\left\{\frac{\partial}{\partial k_l}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}^*\cdot\boldsymbol{E}_0^*-\boldsymbol{E}_0^*\cdot k_{li}\frac{\partial}{\partial k_l}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\right)\\
&+\omega_r\omega_i\left(\boldsymbol{E}_0\cdot\left\{\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}^*\cdot\boldsymbol{E}_0^*+\boldsymbol{E}_0^*\cdot\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\right)\\
&\left.-i\omega_i\omega_i\left(\boldsymbol{E}_0\cdot\left\{\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}^*\cdot\boldsymbol{E}_0^*-\boldsymbol{E}_0^*\cdot\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\right)\right\}=\boldsymbol{0}
\end{aligned}
\tag{2.88}
$$

誘電率テンソルをエルミートテンソルとアンチエルミートテンソルを用いて表す。なお、(2.38) 式が成り

立っていると仮定する。

$$\begin{aligned}
&-2\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{B}_0^*-2\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{E}_0^*\times\boldsymbol{B}_0+2\omega_i\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{B}_0^*\\
&+\mu_0\varepsilon_0\left\{i\omega_r\left(\boldsymbol{E}_0\cdot\{\boldsymbol{K}_H^*-i\boldsymbol{K}_A^*\}\cdot\boldsymbol{E}_0^*-\boldsymbol{E}_0^*\cdot\{\boldsymbol{K}_H+i\boldsymbol{K}_A\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right)\right.\\
&+\omega_i\left(\boldsymbol{E}_0\cdot\{\boldsymbol{K}_H^*-i\boldsymbol{K}_A^*\}\cdot\boldsymbol{E}_0^*+\boldsymbol{E}_0^*\cdot\{\boldsymbol{K}_H+i\boldsymbol{K}_A\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right)\\
&+\omega_r\sum_l\left(\boldsymbol{E}_0\cdot k_{li}\left\{\frac{\partial}{\partial k_l}\{\boldsymbol{K}_H^*-i\boldsymbol{K}_A^*\}\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0^*+\boldsymbol{E}_0^*\cdot k_{li}\frac{\partial}{\partial k_l}\{\boldsymbol{K}_H+i\boldsymbol{K}_A\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right)\\
&-i\omega_i\sum_l\left(\boldsymbol{E}_0\cdot k_{li}\left\{\frac{\partial}{\partial k_l}\{\boldsymbol{K}_H^*-i\boldsymbol{K}_A^*\}\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0^*-\boldsymbol{E}_0^*\cdot k_{li}\frac{\partial}{\partial k_l}\{\boldsymbol{K}_H+i\boldsymbol{K}_A\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right)\\
&+\omega_r\omega_i\left(\boldsymbol{E}_0\cdot\left\{\frac{\partial}{\partial\omega}\{\boldsymbol{K}_H^*-i\boldsymbol{K}_A^*\}\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0^*+\boldsymbol{E}_0^*\cdot\frac{\partial}{\partial\omega}\{\boldsymbol{K}_H+i\boldsymbol{K}_A\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right)\\
&\left.-i\omega_i\omega_i\left(\boldsymbol{E}_0\cdot\left\{\frac{\partial}{\partial\omega}\{\boldsymbol{K}_H^*-i\boldsymbol{K}_A^*\}\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0^*-\boldsymbol{E}_0^*\cdot\frac{\partial}{\partial\omega}\{\boldsymbol{K}_H+i\boldsymbol{K}_A\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right)\right\}=\boldsymbol{0}
\end{aligned}\tag{2.89}$$

$$\begin{aligned}
&-2\boldsymbol{k}_i\cdot(\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{B}_0^*+\boldsymbol{E}_0^*\times\boldsymbol{B}_0)+2\omega_i\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{B}_0^*\\
&+\mu_0\varepsilon_0\left\{2\omega_r\boldsymbol{E}_0^*\cdot\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0+2\omega_i\boldsymbol{E}_0^*\cdot\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\right.\\
&+2\omega_r\sum_l k_{li}\left(\boldsymbol{E}_0^*\cdot\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial k_l}\cdot\boldsymbol{E}_0\right)-2\omega_i\sum_l k_{li}\left(\boldsymbol{E}_0^*\cdot\frac{\partial\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial k_l}\cdot\boldsymbol{E}_0\right)\\
&\left.+2\omega_r\omega_i\left(\boldsymbol{E}_0^*\cdot\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\cdot\boldsymbol{E}_0\right)-2\omega_i\omega_i\left(\boldsymbol{E}_0^*\cdot\frac{\partial\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\cdot\boldsymbol{E}_0\right)\right\}=\boldsymbol{0}
\end{aligned}\tag{2.90}$$

$$\begin{aligned}
&-2\boldsymbol{k}_i\cdot(\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{B}_0^*+\boldsymbol{E}_0^*\times\boldsymbol{B}_0)+2\omega_i\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{B}_0^*\\
&+\mu_0\varepsilon_0\left\{2\omega_r\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{E}_0^*+2\omega_i\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{E}_0^*\right.\\
&+2\omega_r\boldsymbol{k}_i\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{E}_0^*\right)-2\omega_i\boldsymbol{k}_i\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{E}_0^*\right)\\
&\left.+2\omega_r\omega_i\left(\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\cdot\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{E}_0^*\right)-2\omega_i\omega_i\left(\frac{\partial\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\cdot\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{E}_0^*\right)\right\}=\boldsymbol{0}
\end{aligned}\tag{2.91}$$

$$\begin{aligned}
&-2\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{1}{4}(\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{B}_0^*+\boldsymbol{E}_0^*\times\boldsymbol{B}_0)+2\omega_i\frac{1}{4}\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{B}_0^*\\
&+\left\{\mu_0\varepsilon_0\frac{1}{2}\omega_r\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{E}_0^*+2\omega_i\mu_0\varepsilon_0\frac{1}{4}\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{E}_0^*\right.\\
&+2\boldsymbol{k}_i\cdot\mu_0\varepsilon_0\frac{1}{4}\omega_r\left(\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{E}_0^*\right)-2\boldsymbol{k}_i\cdot\omega_i\mu_0\varepsilon_0\frac{1}{4}\left(\frac{\partial\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{E}_0^*\right)\\
&\left.+2\omega_i\mu_0\varepsilon_0\frac{1}{4}\omega_r\left(\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\cdot\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{E}_0^*\right)-2\omega_i\mu_0\varepsilon_0\frac{1}{4}\omega_i\left(\frac{\partial\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\cdot\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{E}_0^*\right)\right\}=\boldsymbol{0}
\end{aligned}\tag{2.92}$$

$$\begin{cases}
\boldsymbol{S}=\dfrac{1}{4\mu_0}(\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{B}_0^*+\boldsymbol{E}_0^*\times\boldsymbol{B}_0)-\dfrac{1}{4}\varepsilon_0\omega_r\left(\dfrac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{E}_0^*\right)+\dfrac{1}{4}\varepsilon_0\omega_i\left(\dfrac{\partial\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{E}_0^*\right)\\
W=\dfrac{1}{4\mu_0}\boldsymbol{B}_0\cdot\boldsymbol{B}_0^*+\varepsilon_0\dfrac{1}{4}\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{E}_0^*\\
+\varepsilon_0\dfrac{1}{4}\omega_r\left(\dfrac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\cdot\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{E}_0^*\right)-\varepsilon_0\dfrac{1}{4}\omega_i\left(\dfrac{\partial\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\cdot\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{E}_0^*\right)\\
Q=\varepsilon_0\dfrac{1}{2}\omega_r\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\cdot\boldsymbol{E}_0^*
\end{cases}\tag{2.93}$$

とした場合、

$$2\omega_i W - 2\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{S} + Q = 0 \tag{2.94}$$

が得られる。なお、近似をすると、

$$\begin{cases} \boldsymbol{S} = \dfrac{1}{4\mu_0}\left(\boldsymbol{E}_0 \times \boldsymbol{B}_0^* + \boldsymbol{E}_0^* \times \boldsymbol{B}_0\right) - \dfrac{1}{4}\varepsilon_0\omega_r\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{E}_0^*\right) \\ W = \dfrac{1}{4\mu_0}\boldsymbol{B}_0 \cdot \boldsymbol{B}_0^* + \varepsilon_0\dfrac{1}{4}\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \cdot \boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{E}_0^* + \varepsilon_0\dfrac{1}{4}\omega_r\left(\dfrac{\partial \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \omega} \cdot \boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{E}_0^*\right) \\ Q = \varepsilon_0\dfrac{1}{2}\omega_r \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \cdot \boldsymbol{E}_0 \cdot \boldsymbol{E}_0^* \end{cases} \tag{2.95}$$

となる。

2.3 電流密度ベクトルについて検討

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}, t) && (2.96)\\ =&\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{k}, \omega) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) && (2.97)\\ \cong&\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{k}_r + i\boldsymbol{k}_i, \omega_r + i\omega_i) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) && (2.98)\\ =&\left\{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}} \cdot i\boldsymbol{k}_i + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \omega} i\omega_i\right\} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) && (2.99) \end{aligned}$$

また、その複素共役は、

$$\begin{aligned} &\{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}, t)\}^* && (2.100)\\ \cong&\left\{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}} \cdot i\boldsymbol{k}_i + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \omega} i\omega_i\right\}^* \cdot \{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)\}^* && (2.101)\\ =&\left[\{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)\}^* - \left\{\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}}\right\}^* \cdot i\boldsymbol{k}_i - \left\{\frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \omega}\right\}^* i\omega_i\right] \cdot \{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)\}^* && (2.102) \end{aligned}$$

電流密度ベクトル $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}, t)$ の成分表示、

$$J_k(\boldsymbol{r}, t) = \sum_l \sigma_{kl}(\boldsymbol{k}, \omega) E_l(\boldsymbol{r}, t) \tag{2.103}$$

を参考にして、

$$J_k(\boldsymbol{r}, t) \cong \sum_l \left[\sigma_{kl}(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) + \frac{\partial \sigma_{kl}(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}} \cdot i\boldsymbol{k}_i + \frac{\partial \sigma_{kl}(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \omega} i\omega_i\right] E_l(\boldsymbol{r}, t) \tag{2.104}$$

$$\{J_k(\boldsymbol{r}, t)\}^* \cong \sum_l \left[\{\sigma_{kl}(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)\}^* - \left\{\frac{\partial \sigma_{kl}(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}}\right\}^* \cdot i\boldsymbol{k}_i - \left\{\frac{\partial \sigma_{kl}(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \omega}\right\}^* i\omega_i\right] \{E_l(\boldsymbol{r}, t)\}^* \tag{2.105}$$

2.4 運動エネルギーの時間変化

荷電粒子の運動エネルギーは $\frac{1}{2}mv^2$。時間で微分すると、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}mv^2 = mv_X\frac{\mathrm{d}v_X}{\mathrm{d}t} + mv_Y\frac{\mathrm{d}v_Y}{\mathrm{d}t} + mv_Z\frac{\mathrm{d}v_Z}{\mathrm{d}t} = m\boldsymbol{v} \cdot \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$$

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{q}{m}(\boldsymbol{E}_\mathrm{g} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}_\mathrm{g})$$

から、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{1}{2}mv^2 = m\boldsymbol{v} \cdot \frac{q}{m}(\boldsymbol{E}_\mathrm{g} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}_\mathrm{g}) = q\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{E}_\mathrm{g}$$

速度分布を考慮し、単位体積当たりの運動エネルギーで見ると、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}n \iiint \frac{1}{2}mv^2 f(\boldsymbol{v})\mathrm{d}^3\boldsymbol{v} = \boldsymbol{J}_\mathrm{g} \cdot \boldsymbol{E}_\mathrm{g}$$

電流密度と電場が波動であるとし、$\Re\omega >> \Im\omega$ を仮定し、１周期で平均を取ると（第 9.1 節参照)、

$$\frac{1}{2}\Re\left(\boldsymbol{J}^* \cdot \boldsymbol{E}\right)$$

$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{J}_0 \exp\left(i(kZ - \omega t)\right)$、$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0 \exp\left(i(kZ - \omega t)\right)$ として、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Re\left(\boldsymbol{J}^* \cdot \boldsymbol{E}\right) &= \frac{1}{2}\Re\left(\boldsymbol{J_0^*} \exp\left(-i(k^*Z - \omega^* t)\right) \cdot \boldsymbol{E}_0 \exp\left(i(kZ - \omega t)\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\Re\left(\boldsymbol{J_0^*} \cdot \boldsymbol{E}_0 \exp\left(i\{(k - k^*)Z - (\omega - \omega^*)t\}\right)\right) \\
&= \frac{1}{2}\Re\left(\boldsymbol{J_0^*} \cdot \boldsymbol{E}_0\right) \exp\left(i\{(k - k^*)Z - (\omega - \omega^*)t\}\right)
\end{aligned}$$

なお、$i\{(k - k^*)Z - (\omega - \omega^*)t\}$ は、実数となるから、$\exp\left(i\left\{(k - k^*)Z - (\omega - \omega^*)t\right\}\right)$ は、正の実数であることに注意する。

2.4.0.0.1　導電率がスカラーである場合　導電率 σ がスカラーという特別な場合、A を正の実数として、$\boldsymbol{J}_0 = \sigma\boldsymbol{E} = A(\cos\theta + i\sin\theta)\boldsymbol{E}$ と表すことができる。この場合、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\Re\left(\boldsymbol{J}^* \cdot \boldsymbol{E}\right) &= \frac{1}{2}A\boldsymbol{E}^* \cdot \boldsymbol{E}\Re\left(\cos(-\theta) + i\sin(-\theta)\right) \exp\left(i\{(k - k^*)Z - (\omega - \omega^*)t\}\right) \\
&= \frac{1}{2}A\boldsymbol{E}^* \cdot \boldsymbol{E}\cos(-\theta) \exp\left(i\{(k - k^*)Z - (\omega - \omega^*)t\}\right) \\
&= \frac{1}{2}A\boldsymbol{E}^* \cdot \boldsymbol{E}\cos\theta \exp\left(i\{(k - k^*)Z - (\omega - \omega^*)t\}\right)
\end{aligned}$$

exp の部分が正の実数であるから、この平均が正であるためには、

$$\pi/2 > \theta > -\pi/2$$

すなわち、

$$\Im\sigma > 0$$

。

2.4.1 誘電率テンソルを用いて変形してみる

$$
\begin{aligned}
&\langle \boldsymbol{J}_{\mathrm{g}} \cdot \boldsymbol{E}_{\mathrm{g}} \rangle && (2.106)\\
\cong&\frac{1}{4}\left(\boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{E}^* + \boldsymbol{J}^*\cdot\boldsymbol{E}\right) && (2.107)\\
=&\frac{1}{4}\left\{-i\omega\varepsilon_0(\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E})\cdot\boldsymbol{E}^* + i\omega^*\varepsilon_0(\{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)\}^*\cdot\boldsymbol{E}^*-\boldsymbol{E}^*)\cdot\boldsymbol{E}\right\} && (2.108)\\
=&\frac{\varepsilon_0}{4}i\left\{-\omega(\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)-\boldsymbol{I})\cdot\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^* + \omega^*(\{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)\}^*-\boldsymbol{I})\cdot\boldsymbol{E}^*\cdot\boldsymbol{E}\right\} && (2.109)\\
=&\frac{\varepsilon_0}{4}i\left\{-\omega(\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*-\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*) + \omega^*(\{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)\}^*\cdot\boldsymbol{E}^*\cdot\boldsymbol{E}-\boldsymbol{E}^*\cdot\boldsymbol{E})\right\} && (2.110)\\
=&\frac{\varepsilon_0}{4}i\left\{-\omega\left(\sum_{k,l}(K_{kl}(\boldsymbol{k},\omega)E_l{E_k}^*)-\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*\right)+\omega^*\left(\sum_{k,l}\left(\{K_{kl}(\boldsymbol{k},\omega)\}^*{E_l}^*E_k\right)-\boldsymbol{E}^*\cdot\boldsymbol{E}\right)\right\} && (2.111)
\end{aligned}
$$

中括弧内第 2 項について、k と l を入れ替える。

$$
\begin{aligned}
&\langle \boldsymbol{J}_{\mathrm{g}} \cdot \boldsymbol{E}_{\mathrm{g}} \rangle && (2.112)\\
\cong&\frac{\varepsilon_0}{4}i\left\{-\omega\left(\sum_{k,l}(K_{kl}(\boldsymbol{k},\omega)E_l{E_k}^*)-\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{E}^*\right)+\omega^*\left(\sum_{k,l}\left(\{K_{lk}(\boldsymbol{k},\omega)\}^*{E_k}^*E_l\right)-\boldsymbol{E}^*\cdot\boldsymbol{E}\right)\right\} && (2.113)\\
=&\frac{\varepsilon_0}{4}i\left\{-\omega\boldsymbol{E}^*\cdot(\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)-\boldsymbol{I})\cdot\boldsymbol{E}+\omega^*\boldsymbol{E}^*\cdot\left(\left\{\boldsymbol{K}^T(\boldsymbol{k},\omega)\right\}^*-\boldsymbol{I}\right)\cdot\boldsymbol{E}\right\} && (2.114)\\
=&\frac{\varepsilon_0}{4}i\boldsymbol{E}^*\cdot\left\{-\omega\left(\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)-\boldsymbol{I}\right)+\omega^*\left(\left\{\boldsymbol{K}^T(\boldsymbol{k},\omega)\right\}^*-\boldsymbol{I}\right)\right\}\cdot\boldsymbol{E} && (2.115)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega) \cong& \boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+\frac{\partial\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}\cdot i\boldsymbol{k}_i+\frac{\partial\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}i\omega_i && (2.116)\\
\left\{\boldsymbol{K}^T(\boldsymbol{k},\omega)\right\}^* \cong& \left\{\boldsymbol{K}^T(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}^*+\left\{\frac{\partial\boldsymbol{K}^T(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}\cdot i\boldsymbol{k}_i\right\}^*+\left\{\frac{\partial\boldsymbol{K}^T(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}i\omega_i\right\}^* && (2.117)\\
=& \left\{\boldsymbol{K}^T(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}^*-\left\{\frac{\partial\boldsymbol{K}^T(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}\right\}^*\cdot i\boldsymbol{k}_i-\left\{\frac{\partial\boldsymbol{K}^T(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\right\}^* i\omega_i && (2.118)
\end{aligned}
$$

を代入。

$$\langle \boldsymbol{J}_{\rm g}\cdot\boldsymbol{E}_{\rm g}\rangle \tag{2.119}$$

$$\cong\frac{\varepsilon_0}{4}i\boldsymbol{E}^*\cdot\left\{-(\omega_r+i\omega_i)\left[\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+\frac{\partial\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}\cdot i\boldsymbol{k}_i+\frac{\partial\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}i\omega_i-\boldsymbol{I}\right]\right. \tag{2.120}$$

$$\left.+(\omega_r-i\omega_i)\left[\left\{\boldsymbol{K}^T(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}^*-\left\{\frac{\partial\boldsymbol{K}^T(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}\right\}^*\cdot i\boldsymbol{k}_i-\left\{\frac{\partial\boldsymbol{K}^T(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\right\}^*i\omega_i-\boldsymbol{I}\right]\right\}\cdot\boldsymbol{E} \tag{2.121}$$

$$=\frac{\varepsilon_0}{4}i\boldsymbol{E}^*\cdot\left\{-\omega_r\left[\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+\frac{\partial\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}\cdot i\boldsymbol{k}_i+\frac{\partial\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}i\omega_i-\boldsymbol{I}\right]\right. \tag{2.122}$$

$$-i\omega_i\left[\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+\frac{\partial\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}\cdot i\boldsymbol{k}_i+\frac{\partial\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}i\omega_i-\boldsymbol{I}\right] \tag{2.123}$$

$$+\omega_r\left[\left\{\boldsymbol{K}^T(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}^*-\left\{\frac{\partial\boldsymbol{K}^T(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}\right\}^*\cdot i\boldsymbol{k}_i-\left\{\frac{\partial\boldsymbol{K}^T(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\right\}^*i\omega_i-\boldsymbol{I}\right] \tag{2.124}$$

$$\left.-i\omega_i\left[\left\{\boldsymbol{K}^T(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}^*-\left\{\frac{\partial\boldsymbol{K}^T(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}\right\}^*\cdot i\boldsymbol{k}_i-\left\{\frac{\partial\boldsymbol{K}^T(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\right\}^*i\omega_i-\boldsymbol{I}\right]\right\}\cdot\boldsymbol{E} \tag{2.125}$$

$$=\frac{\varepsilon_0}{4}i\boldsymbol{E}^*\cdot\left\{-\omega_r\left[\left[\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-\left\{\boldsymbol{K}^T(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}^*\right]+\left[\frac{\partial\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}+\left\{\frac{\partial\boldsymbol{K}^T(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}\right\}^*\right]\cdot i\boldsymbol{k}_i\right.\right. \tag{2.126}$$

$$\left.+\left[\frac{\partial\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}+\left\{\frac{\partial\boldsymbol{K}^T(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\right\}^*\right]i\omega_i\right]-i\omega_i\left[\left[\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+\left\{\boldsymbol{K}^T(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}^*-2\boldsymbol{I}\right]\right. \tag{2.127}$$

$$\left.\left.+\left[\frac{\partial\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}-\left\{\frac{\partial\boldsymbol{K}^T(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}\right\}^*\right]\cdot i\boldsymbol{k}_i+\left[\frac{\partial\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}-\left\{\frac{\partial\boldsymbol{K}^T(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\right\}^*\right]i\omega_i\right]\right\}\cdot\boldsymbol{E} \tag{2.128}$$

ここで、エルミー成分とアンチエルミート成分を導入する。すなわち、

$$\begin{cases}\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)=\dfrac{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+\left\{\boldsymbol{K}^T(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}^*}{2}\\ \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)=\dfrac{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-\left\{\boldsymbol{K}^T(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}^*}{2i}\end{cases} \tag{2.129}$$

とする。さらに、

$$\begin{cases}\left\{\dfrac{\partial\boldsymbol{K}^T(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}\right\}^*=\dfrac{\partial\left\{\boldsymbol{K}^T(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}^*}{\partial\boldsymbol{k}}\\ \left\{\dfrac{\partial\boldsymbol{K}^T(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\right\}^*=\dfrac{\partial\left\{\boldsymbol{K}^T(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}^*}{\partial\omega}\end{cases} \tag{2.130}$$

が成り立っていると仮定する。ただし、証明していない。

$$\langle \boldsymbol{J}_{\rm g}\cdot\boldsymbol{E}_{\rm g}\rangle \tag{2.131}$$

$$\cong\frac{\varepsilon_0}{4}i\boldsymbol{E}^*\cdot\left\{-\omega_r\left[2i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+2\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}\cdot i\boldsymbol{k}_i+2\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}i\omega_i\right]\right. \tag{2.132}$$

$$\left.-i\omega_i\left[2\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-2\boldsymbol{I}+2i\frac{\partial\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}\cdot i\boldsymbol{k}_i+2i\frac{\partial\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}i\omega_i\right]\right\}\cdot\boldsymbol{E} \tag{2.133}$$

$$=\frac{\varepsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^*\cdot\left\{\omega_r\left[\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{k}_i+\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\omega_i\right]\right. \tag{2.134}$$

$$\left.+\omega_i\left[\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-\boldsymbol{I}-\frac{\partial\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{k}_i-\frac{\partial\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\omega_i\right]\right\}\cdot\boldsymbol{E} \tag{2.135}$$

近似すると、

$$\langle \boldsymbol{J}_\mathrm{g} \cdot \boldsymbol{E}_\mathrm{g} \rangle \tag{2.136}$$

$$\cong \frac{\varepsilon_0}{2} \boldsymbol{E}^* \cdot \left\{ \omega_r \left[\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) + \frac{\partial \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{k}_i + \frac{\partial \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \omega} \omega_i \right] + \omega_i \left[\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) - \boldsymbol{I} \right] \right\} \cdot \boldsymbol{E} \tag{2.137}$$

2.5 エネルギーとポインチングベクトルについて考える

入射波と反射波が存在する場合の、電場と磁場を

$$\boldsymbol{E}_\mathrm{g}(\boldsymbol{r}, t) = \Re \left[\boldsymbol{E}_{0i} \exp\left\{ i\left(\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r} - \omega t \right) \right\} + \boldsymbol{E}_{0r} \exp\left\{ i\left(\boldsymbol{k}_r \cdot \boldsymbol{r} - \omega t \right) \right\} \right] \tag{2.138}$$

$$= \Re \left[\left\{ \boldsymbol{E}_{0i}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_{0r}(\boldsymbol{r}) \right\} \exp\left\{ -i\omega t \right\} \right] \tag{2.139}$$

$$\boldsymbol{B}_\mathrm{g}(\boldsymbol{r}, t) = \Re \left[\boldsymbol{B}_{0i} \exp\left\{ i\left(\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{r} - \omega t \right) \right\} + \boldsymbol{B}_{0r} \exp\left\{ i\left(\boldsymbol{k}_r \cdot \boldsymbol{r} - \omega t \right) \right\} \right] \tag{2.140}$$

$$= \Re \left[\left\{ \boldsymbol{B}_{0i}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{B}_{0r}(\boldsymbol{r}) \right\} \exp\left\{ -i\omega t \right\} \right] \tag{2.141}$$

とする。

$$\frac{1}{T} \int_{t_0 - T/2}^{t_0 + T/2} \frac{A(t) + A^*(t)}{2} \frac{B(t) + B^*(t)}{2} \mathrm{d}t \cong \frac{A^*(t_0)B(t_0) + A(t_0)B^*(t_0)}{4} \tag{2.142}$$

$$\frac{1}{T} \int_{t_0 - T/2}^{t_0 + T/2} \Re\left\{ A(t) \right\} \Re\left\{ B(t) \right\} \mathrm{d}t \cong \frac{A^*(t_0)B(t_0) + A(t_0)B^*(t_0)}{4} \tag{2.143}$$

$$\frac{1}{T} \int_{t_0 - T/2}^{t_0 + T/2} \Re\left\{ A(t) \right\} \Re\left\{ B(t) \right\} \mathrm{d}t \cong \frac{1}{2} \Re\left\{ A^*(t_0)B(t_0) \right\} \tag{2.144}$$

を用いて、

$$\left\langle \frac{\varepsilon_0}{2} \boldsymbol{E}_\mathrm{g}(\boldsymbol{r}, t) \cdot \boldsymbol{E}_\mathrm{g}(\boldsymbol{r}, t) \right\rangle$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2} \frac{1}{T} \int_{t_0 - T/2}^{t_0 + T/2} \Re \left[\left\{ \boldsymbol{E}_{0i}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_{0r}(\boldsymbol{r}) \right\} \exp\left\{ -i\omega t \right\} \right] \cdot \Re \left[\left\{ \boldsymbol{E}_{0i}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_{0r}(\boldsymbol{r}) \right\} \exp\left\{ -i\omega t \right\} \right] \mathrm{d}t \tag{2.145}$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{8} \left(\left[\left\{ \boldsymbol{E}_{0i}^*(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_{0r}^*(\boldsymbol{r}) \right\} \exp\left\{ i\omega^* t \right\} \right] \cdot \left[\left\{ \boldsymbol{E}_{0i}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_{0r}(\boldsymbol{r}) \right\} \exp\left\{ -i\omega t \right\} \right] \right.$$

$$\left. + \left[\left\{ \boldsymbol{E}_{0i}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_{0r}(\boldsymbol{r}) \right\} \exp\left\{ -i\omega t \right\} \right] \cdot \left[\left\{ \boldsymbol{E}_{0i}^*(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_{0r}^*(\boldsymbol{r}) \right\} \exp\left\{ i\omega^* t \right\} \right] \right) \tag{2.146}$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{4} \left(\left\{ \boldsymbol{E}_{0i}^*(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_{0r}^*(\boldsymbol{r}) \right\} \cdot \left\{ \boldsymbol{E}_{0i}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_{0r}(\boldsymbol{r}) \right\} \right) \exp\left\{ -i\left(\omega - \omega^* \right) t \right\} \tag{2.147}$$

角周波数 ω が実数であるとすると、$\omega = \omega^*$ なので、

$$= \frac{\varepsilon_0}{4} \left(\left\{ \boldsymbol{E}_{0i}^*(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_{0r}^*(\boldsymbol{r}) \right\} \cdot \left\{ \boldsymbol{E}_{0i}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{E}_{0r}(\boldsymbol{r}) \right\} \right) \tag{2.148}$$

同様の計算により、

$$\left\langle \frac{1}{2\mu_0} \boldsymbol{B}_\mathrm{g}(\boldsymbol{r}, t) \cdot \boldsymbol{B}_\mathrm{g}(\boldsymbol{r}, t) \right\rangle$$

$$= \frac{1}{4\mu_0} \left(\left\{ \boldsymbol{B}_{0i}^*(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{B}_{0r}^*(\boldsymbol{r}) \right\} \cdot \left\{ \boldsymbol{B}_{0i}(\boldsymbol{r}) + \boldsymbol{B}_{0r}(\boldsymbol{r}) \right\} \right) \tag{2.149}$$

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \frac{1}{\mu_0}\left\{\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}\left(\boldsymbol{r},t\right)\times\boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}\left(\boldsymbol{r},t\right)\right\}\right\rangle \\
=&\frac{1}{4\mu_0}\left\{\left[\left\{\boldsymbol{E}_{0i}^*\left(\boldsymbol{r}\right)+\boldsymbol{E}_{0r}^*\left(\boldsymbol{r}\right)\right\}\exp\left\{i\omega^* t\right\}\right]\times\left[\left\{\boldsymbol{B}_{0i}\left(\boldsymbol{r}\right)+\boldsymbol{B}_{0r}\left(\boldsymbol{r}\right)\right\}\exp\left\{-i\omega t\right\}\right]\right. \\
&\left.+\left[\left\{\boldsymbol{E}_{0i}\left(\boldsymbol{r}\right)+\boldsymbol{E}_{0r}\left(\boldsymbol{r}\right)\right\}\exp\left\{-i\omega t\right\}\right]\times\left[\left\{\boldsymbol{B}_{0i}^*\left(\boldsymbol{r}\right)+\boldsymbol{B}_{0r}^*\left(\boldsymbol{r}\right)\right\}\exp\left\{i\omega^* t\right\}\right]\right\} \qquad (2.150) \\
=&\frac{1}{4\mu_0}\left\{\left[\boldsymbol{E}_{0i}^*\left(\boldsymbol{r}\right)+\boldsymbol{E}_{0r}^*\left(\boldsymbol{r}\right)\right]\times\left[\boldsymbol{B}_{0i}\left(\boldsymbol{r}\right)+\boldsymbol{B}_{0r}\left(\boldsymbol{r}\right)\right]\right. \\
&\left.+\left[\boldsymbol{E}_{0i}\left(\boldsymbol{r}\right)+\boldsymbol{E}_{0r}\left(\boldsymbol{r}\right)\right]\times\left[\boldsymbol{B}_{0i}^*\left(\boldsymbol{r}\right)+\boldsymbol{B}_{0r}^*\left(\boldsymbol{r}\right)\right]\right\}\exp\left\{-i\omega t\right\}\exp\left\{i\omega^* t\right\} \qquad (2.151)
\end{aligned}
$$

角周波数 ω が実数であるとすると、$\omega=\omega^*$ なので、

$$
=\frac{1}{4\mu_0}\left\{\left[\boldsymbol{E}_{0i}^*\left(\boldsymbol{r}\right)+\boldsymbol{E}_{0r}^*\left(\boldsymbol{r}\right)\right]\times\left[\boldsymbol{B}_{0i}\left(\boldsymbol{r}\right)+\boldsymbol{B}_{0r}\left(\boldsymbol{r}\right)\right]+\left[\boldsymbol{E}_{0i}\left(\boldsymbol{r}\right)+\boldsymbol{E}_{0r}\left(\boldsymbol{r}\right)\right]\times\left[\boldsymbol{B}_{0i}^*\left(\boldsymbol{r}\right)+\boldsymbol{B}_{0r}^*\left(\boldsymbol{r}\right)\right]\right\} \qquad (2.152)
$$

第 3 章　電磁波の運動量について

3.1　運動量収支

マックスウェル方程式の電磁誘導の式に $\varepsilon_0 \boldsymbol{E}$ を左から外積したものに、アンペールの法則の式に $\boldsymbol{B}/\mu_0$ を左から外積したものを足し、電場に関するガウスの法則の式に $\boldsymbol{E}$ を掛けたものを引き、磁場に関するガウスの法則の式に $\boldsymbol{B}$ を掛けたものを引く。途中、ベクトル公式 $\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A} + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}) + \boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$ を用いる。

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_0 \boldsymbol{E}_{\mathrm{g}} \times \left(\nabla \times \boldsymbol{E}_{\mathrm{g}} + \frac{\partial \boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}}{\partial t}\right) + \frac{\boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}}{\mu_0} \times \left(\nabla \times \boldsymbol{B}_{\mathrm{g}} - \mu_0 \boldsymbol{J}_{\mathrm{g}} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}}{\partial t}\right) - \boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}\varepsilon_0 \nabla\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}} + \boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}\rho_{\mathrm{g}} - \frac{\boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}}{\mu_0}\nabla\cdot\boldsymbol{B}_{\mathrm{g}} \\
= \;& \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}} \times \boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}\right) + \varepsilon_0 \boldsymbol{E}_{\mathrm{g}} \times (\nabla \times \boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}) - \boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}\varepsilon_0\nabla\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}} + \frac{\boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}}{\mu_0} \times (\nabla \times \boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}) - \frac{\boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}}{\mu_0}\nabla\cdot\boldsymbol{B}_{\mathrm{g}} + (\rho_{\mathrm{g}}\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}} + \boldsymbol{J}_{\mathrm{g}} \times \boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}) \\
= \;& \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

第 9.2 節を参考にして、

$$
\boxed{\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}} \times \boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}\right) + \nabla\cdot\left\{\varepsilon_0\left(\frac{\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}}{2}\boldsymbol{I} - \boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}\otimes\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(\frac{\boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}\cdot\boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}}{2}\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}\otimes\boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}\right)\right\} + (\rho_{\mathrm{g}}\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}} + \boldsymbol{J}_{\mathrm{g}} \times \boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}) = \boldsymbol{0}} \tag{3.1}
$$

ただし、$\boldsymbol{I}$ は単位テンソル、演算子 $\otimes$ はテンソル積を示す。

なお、

$$
\varepsilon_0\left(\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}\otimes\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}} - \frac{\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}\cdot\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}}{2}\boldsymbol{I}\right) + \frac{1}{\mu_0}\left(\boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}\otimes\boldsymbol{B}_{\mathrm{g}} - \frac{\boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}\cdot\boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}}{2}\boldsymbol{I}\right) \tag{3.2}
$$

は、マックスウェルの応力テンソルといわれる。

3.2 プラズマ加熱基礎論の式を導く。

マックスウェルの方程式のうち、電場に関するガウスの法則の式の左辺 $\nabla\cdot\bar{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{r},t)\exp\{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-i\omega t\}$ は、

$$
\begin{aligned}
&\nabla\cdot\bar{\boldsymbol{D}}(\boldsymbol{r},t)\exp\{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-i\omega t\} && (3.3)\\
=&\nabla\cdot\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\mathrm{d}\Omega\varepsilon_0\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q},\omega+\Omega)\cdot\bar{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{q},\Omega)\exp\{i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{r}-i(\omega+\Omega)t\} && (3.4)\\
=&\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\mathrm{d}\Omega\varepsilon_0 i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q},\omega+\Omega)\cdot\bar{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{q},\Omega)\exp\{i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{r}-i(\omega+\Omega)t\} && (3.5)\\
=&\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\mathrm{d}\Omega\varepsilon_0 i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q})\cdot\left\{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)+\frac{\partial\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{q}+\frac{\partial\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\omega}\Omega\right\} && (3.6)\\
&\cdot\bar{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{q},\Omega)\times\exp\{i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{r}-i(\omega+\Omega)t\} && (3.7)\\
=&\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\mathrm{d}\Omega\varepsilon_0\left\{i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)+i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q})\cdot\sum_k\frac{\partial\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial k_k}q_k+i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q})\cdot\frac{\partial\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\omega}\Omega\right\} && (3.8)\\
&\cdot\bar{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{q},\Omega)\times\exp\{i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{r}-i(\omega+\Omega)t\} && (3.9)\\
\cong&\int \mathrm{d}\boldsymbol{q}\mathrm{d}\Omega\varepsilon_0\left\{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)+i\boldsymbol{q}\cdot\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)+i\boldsymbol{k}\cdot\sum_k\frac{\partial\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial k_k}q_k+i\boldsymbol{k}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\omega}\Omega\right\} && (3.10)\\
&\cdot\bar{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{q},\Omega)\times\exp\{i(\boldsymbol{k}+\boldsymbol{q})\cdot\boldsymbol{r}-i(\omega+\Omega)t\} && (3.11)\\
=&\varepsilon_0\left\{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)+\nabla\cdot\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)+\boldsymbol{k}\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\boldsymbol{k}}\cdot\nabla\right)-\boldsymbol{k}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\omega}\frac{\partial}{\partial t}\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t) && (3.12)
\end{aligned}
$$

マックスウェル方程式の４式は、

$$
\begin{cases}
i\boldsymbol{k}\times\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)+\nabla\times\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)-i\omega\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)+\dfrac{\partial\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=\boldsymbol{0}\\
i\boldsymbol{k}\times\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)+\nabla\times\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)\\
\quad+\mu_0\varepsilon_0\left\{i\omega\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)+\dfrac{\partial\omega\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\boldsymbol{k}}\cdot\nabla-\dfrac{\partial\omega\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\omega}\dfrac{\partial}{\partial t}\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)=\mu_0\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{ex}}(\boldsymbol{r},t)\\
\varepsilon_0\left\{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)+\nabla\cdot\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)+\boldsymbol{k}\cdot\left(\dfrac{\partial\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\boldsymbol{k}}\cdot\nabla\right)-\boldsymbol{k}\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\omega}\dfrac{\partial}{\partial t}\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)=\bar{\rho}_{\mathrm{ex}}\\
i\boldsymbol{k}\cdot\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)+\nabla\cdot\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)=0
\end{cases}
\tag{3.13}
$$

マックスウェル方程式の０次の式は、

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{k}\times\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)-\omega\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{0}\\
\boldsymbol{k}\times\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)+\mu_0\varepsilon_0\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{0}\\
\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)=0\\
\boldsymbol{k}\cdot\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)=0
\end{cases}
\tag{3.14}
$$

マックスウェル方程式の１次の式は、

$$\begin{cases}\nabla\times\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)+\dfrac{\partial\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=\boldsymbol{0}\\ \nabla\times\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)+\mu_0\varepsilon_0\left\{i\omega i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k},\omega)+\dfrac{\partial\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\boldsymbol{k}}\cdot\nabla-\dfrac{\partial\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\omega}\dfrac{\partial}{\partial t}\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)=\mu_0\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{ex}}(\boldsymbol{r},t)\\ \varepsilon_0\left\{i\boldsymbol{k}\cdot i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k},\omega)+\nabla\cdot\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)+\boldsymbol{k}\cdot\left(\dfrac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\boldsymbol{k}}\cdot\nabla\right)-\boldsymbol{k}\cdot\dfrac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\omega}\dfrac{\partial}{\partial t}\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)=\bar{\rho}_{\mathrm{ex}}\\ \nabla\cdot\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)=0\end{cases}\tag{3.15}$$

第１式の複素共役に、左から $\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)$ を掛ける。

$$\varepsilon_0\left\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\times\left\{\nabla\times\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\right\}+\varepsilon_0\left\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\times\frac{\partial\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}=\boldsymbol{0}\tag{3.16}$$

第２式に、左から $\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)/\mu_0$ を掛ける。

$$\begin{aligned}&\frac{\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)}{\mu_0}\times\left\{\nabla\times\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\\ +\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\times\varepsilon_0&\left\{-\omega\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k},\omega)+\frac{\partial\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\boldsymbol{k}}\cdot\nabla-\frac{\partial\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\omega}\frac{\partial}{\partial t}\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)=\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\times\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{ex}}(\boldsymbol{r},t)\end{aligned}\tag{3.17}$$

第３式に $\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)$ を掛けると、

$$\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\varepsilon_0\left\{-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k},\omega)+\nabla\cdot\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)+\boldsymbol{k}\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\boldsymbol{k}}\cdot\nabla\right)-\boldsymbol{k}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\omega}\frac{\partial}{\partial t}\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)=\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\bar{\rho}_{\mathrm{ex}}\tag{3.18}$$

第４式の複素共役に $\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)/\mu_0$ を掛けると、

$$\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)/\mu_0\nabla\cdot\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{0}\tag{3.19}$$

（第１式）＋（第２式）－（第３式）－（第４式）をする。

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_0\left\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\times\left\{\nabla\times\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\right\}+\varepsilon_0\left\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\times\frac{\partial\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\\
&+\frac{\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)}{\mu_0}\times\left\{\nabla\times\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\\
&+\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\times\varepsilon_0\left\{-\omega\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k},\omega)+\frac{\partial\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\boldsymbol{k}}\cdot\nabla-\frac{\partial\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\omega}\frac{\partial}{\partial t}\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\\
&-\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\varepsilon_0\left\{-\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k},\omega)+\nabla\cdot\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)+\boldsymbol{k}\cdot\left(\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\boldsymbol{k}}\cdot\nabla\right)-\boldsymbol{k}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\omega}\frac{\partial}{\partial t}\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\\
&-\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)/\mu_0\nabla\cdot\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)=\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\times\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{ex}}(\boldsymbol{r},t)-\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\bar{\rho}_{\mathrm{ex}}(\boldsymbol{r},t)
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon_0\left\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\times\left\{\nabla\times\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\right\}-\varepsilon_0\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\nabla\cdot\left\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\\
&+\frac{\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)}{\mu_0}\times\left\{\nabla\times\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)\right\}-\frac{\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)}{\mu_0}\nabla\cdot\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\\
&+\varepsilon_0\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\times\left\{\sum_l\frac{\partial\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial k_l}\frac{\partial}{\partial r_l}\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)-\varepsilon_0\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{k}\cdot\left\{\left(\sum_l\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial k_l}\frac{\partial}{\partial r_l}\right)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\\
&+\varepsilon_0\left\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\times\frac{\partial\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}-\varepsilon_0\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\times\left\{\frac{\partial\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\omega}\frac{\partial}{\partial t}\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\\
&+\varepsilon_0\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{k}\cdot\left\{\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\\
&-\varepsilon_0\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\times\left\{\omega\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k},\omega)\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)+\varepsilon_0\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{k}\cdot\left\{\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\\
&=\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\times\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{ex}}(\boldsymbol{r},t)-\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\bar{\rho}_{\mathrm{ex}}(\boldsymbol{r},t)
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

この式と、この式の複素共役との和を取る。ややこしくなるので、数個に分解する。
１つ目は、第 9.2 節を参考に、さらに、第 9.3 節を参考に、

$$\varepsilon_0\left\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\times\left\{\nabla\times\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\right\}-\varepsilon_0\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\nabla\cdot\left\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\tag{3.22}$$

$$+\varepsilon_0\left\{\boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\right\}\times\left\{\nabla\times\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}-\varepsilon_0\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\nabla\cdot\left\{\boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\right\}\tag{3.23}$$

$$=\varepsilon_0\left\{\nabla\otimes\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\right\}\cdot\left\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}-\varepsilon_0\nabla\cdot\left[\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\otimes\left\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\right]\tag{3.24}$$

$$+\varepsilon_0\left\{\nabla\otimes\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\cdot\left\{\boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\right\}-\varepsilon_0\nabla\cdot\left[\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\otimes\left\{\boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\right\}\right]\tag{3.25}$$

$$=\varepsilon_0\nabla\cdot\left(\left\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega):\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\otimes\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\boldsymbol{I}-2\Re\left[\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\otimes\left\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\right]\right)\tag{3.26}$$

ただし、

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial A_{XX}}{\partial X}+\dfrac{\partial A_{XY}}{\partial Y}+\dfrac{\partial A_{XZ}}{\partial Z}\\ \dfrac{\partial A_{YX}}{\partial X}+\dfrac{\partial A_{YY}}{\partial Y}+\dfrac{\partial A_{YZ}}{\partial Z}\\ \dfrac{\partial A_{ZX}}{\partial X}+\dfrac{\partial A_{ZY}}{\partial Y}+\dfrac{\partial A_{ZZ}}{\partial Z}\end{pmatrix}\tag{3.27}$$

と定義する。

2 つ目も、第 9.2 節と第 9.3 節を参考に、

$$\frac{\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)}{\mu_0}\times\left\{\nabla\times\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)\right\}-\frac{\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)}{\mu_0}\nabla\cdot\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t) \tag{3.28}$$

$$+\frac{\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)}{\mu_0}\times\left\{\nabla\times\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\right\}-\frac{\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)}{\mu_0}\nabla\cdot\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t) \tag{3.29}$$

$$=\frac{1}{\mu_0}\left\{\nabla\otimes\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)-\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot\left[\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)\otimes\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\right] \tag{3.30}$$

$$+\frac{1}{\mu_0}\left\{\nabla\otimes\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)-\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot\left[\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\otimes\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)\right] \tag{3.31}$$

$$=\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot\left[\left\{\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\right\}\boldsymbol{I}-2\Re\left\{\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)\otimes\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\right\}\right] \tag{3.32}$$

３つ目は、

$$\varepsilon_0\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\times\left\{\sum_l\frac{\partial\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial k_l}\frac{\partial}{\partial r_l}\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)-\varepsilon_0\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{k}\cdot\left\{\left(\sum_l\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial k_l}\frac{\partial}{\partial r_l}\right)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\} \tag{3.33}$$

であるが、マックスウェルの方程式 $\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{k}\times\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)/\omega$ を代入して、

$$\begin{aligned}&\varepsilon_0\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\times\left\{\sum_l\frac{\partial\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial k_l}\frac{\partial}{\partial r_l}\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)-\varepsilon_0\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{k}\cdot\left\{\left(\sum_l\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial k_l}\frac{\partial}{\partial r_l}\right)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\\&=\varepsilon_0\frac{\boldsymbol{k}\times\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)}{\omega}\times\left\{\sum_l\frac{\partial\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial k_l}\frac{\partial}{\partial r_l}\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)-\varepsilon_0\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{k}\cdot\left\{\left(\sum_l\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial k_l}\frac{\partial}{\partial r_l}\right)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\end{aligned} \tag{3.34}$$

ベクトル公式 $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}$ を用いて、

$$\begin{aligned}&\varepsilon_0\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\times\left\{\sum_l\frac{\partial\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial k_l}\frac{\partial}{\partial r_l}\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)-\varepsilon_0\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{k}\cdot\left\{\left(\sum_l\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial k_l}\frac{\partial}{\partial r_l}\right)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\\&=\varepsilon_0\left(\boldsymbol{k}\times\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\right)\times\left\{\sum_l\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial k_l}\frac{\partial}{\partial r_l}\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)-\varepsilon_0\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{k}\cdot\left\{\left(\sum_l\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial k_l}\frac{\partial}{\partial r_l}\right)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned}=&\varepsilon_0\left[\left(\boldsymbol{k}\cdot\left\{\sum_l\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial k_l}\frac{\partial}{\partial r_l}\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right)\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)-\left(\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\left\{\sum_l\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial k_l}\frac{\partial}{\partial r_l}\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right)\boldsymbol{k}\right]\\&-\varepsilon_0\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{k}\cdot\left\{\left(\sum_l\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial k_l}\frac{\partial}{\partial r_l}\right)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\end{aligned} \tag{3.36}$$

$$=-\varepsilon_0\left(\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\left\{\sum_l\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial k_l}\frac{\partial}{\partial r_l}\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right)\boldsymbol{k} \tag{3.37}$$

$$=-\varepsilon_0\left(\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\left\{\sum_l\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial k_l}\cdot\frac{\partial\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)}{\partial r_l}\right\}\right)\boldsymbol{k} \tag{3.38}$$

複素共役との和をとると、

$$-\varepsilon_0\left(\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\left\{\sum_l\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial k_l}\cdot\frac{\partial\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)}{\partial r_l}\right\}\right)\boldsymbol{k}-\varepsilon_0\left(\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\left\{\sum_l\frac{\partial\boldsymbol{K}^*_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial k_l}\cdot\frac{\partial\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)}{\partial r_l}\right\}\right)\boldsymbol{k} \tag{3.39}$$

$$=-\varepsilon_0\boldsymbol{k}\sum_{l,m,n}\left\{\bar{E}^*_m(\boldsymbol{r},t)\frac{\partial K_{Hmn}(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial k_l}\frac{\partial\bar{E}_n(\boldsymbol{r},t)}{\partial r_l}+\bar{E}_n(\boldsymbol{r},t)\frac{\partial K^*_{Hnm}(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial k_l}\frac{\partial\bar{E}^*_m(\boldsymbol{r},t)}{\partial r_l}\right\} \tag{3.40}$$

$$=-\varepsilon_0\boldsymbol{k}\sum_{l,m,n}\left\{\bar{E}^*_m(\boldsymbol{r},t)\frac{\partial K_{Hmn}(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial k_l}\frac{\partial\bar{E}_n(\boldsymbol{r},t)}{\partial r_l}+\bar{E}_n(\boldsymbol{r},t)\frac{\partial K_{Hmn}(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial k_l}\frac{\partial\bar{E}^*_m(\boldsymbol{r},t)}{\partial r_l}\right\} \tag{3.41}$$

$$=-\varepsilon_0\boldsymbol{k}\sum_{l,m,n}\frac{\partial}{\partial k_l}\frac{\partial}{\partial r_l}\left\{\bar{E}^*_m(\boldsymbol{r},t)K_{Hmn}(\boldsymbol{k},\omega)\bar{E}_n(\boldsymbol{r},t)\right\} \tag{3.42}$$

$$=-\varepsilon_0\boldsymbol{k}\sum_{l}\frac{\partial}{\partial k_l}\frac{\partial}{\partial r_l}\left\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega):\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\otimes\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\} \tag{3.43}$$

$$=-\varepsilon_0\begin{pmatrix}\frac{\partial}{\partial X}k_X\frac{\partial}{\partial k_X}+\frac{\partial}{\partial Y}k_X\frac{\partial}{\partial k_Y}+\frac{\partial}{\partial Z}k_X\frac{\partial}{\partial k_Z}\\ \frac{\partial}{\partial X}k_Y\frac{\partial}{\partial k_X}+\frac{\partial}{\partial Y}k_Y\frac{\partial}{\partial k_Y}+\frac{\partial}{\partial Z}k_Y\frac{\partial}{\partial k_Z}\\ \frac{\partial}{\partial X}k_Z\frac{\partial}{\partial k_X}+\frac{\partial}{\partial Y}k_Z\frac{\partial}{\partial k_Y}+\frac{\partial}{\partial Z}k_Z\frac{\partial}{\partial k_Z}\end{pmatrix}\left\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega):\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\otimes\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\} \tag{3.44}$$

$$=-\varepsilon_0\nabla\cdot\begin{pmatrix}k_X\frac{\partial}{\partial k_X} & k_X\frac{\partial}{\partial k_Y} & k_X\frac{\partial}{\partial k_Z}\\ k_Y\frac{\partial}{\partial k_X} & k_Y\frac{\partial}{\partial k_Y} & k_Y\frac{\partial}{\partial k_Z}\\ k_Z\frac{\partial}{\partial k_X} & k_Z\frac{\partial}{\partial k_Y} & k_Z\frac{\partial}{\partial k_Z}\end{pmatrix}\left\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega):\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\otimes\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\} \tag{3.45}$$

$$=-\varepsilon_0\nabla\cdot\left(\boldsymbol{k}\otimes\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\right)\left\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega):\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\otimes\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\} \tag{3.46}$$

$$\tag{3.47}$$

４つ目は、

$$\varepsilon_0\left\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\times\frac{\partial\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}-\varepsilon_0\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\times\left\{\frac{\partial\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\omega}\frac{\partial}{\partial t}\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)$$
$$+\varepsilon_0\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{k}\cdot\left\{\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\} \tag{3.48}$$

第３項は０次のガウスの法則によりゼロになる。

$$\varepsilon_0\left\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\times\frac{\partial\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}-\varepsilon_0\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\times\left\{\frac{\partial\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\omega}\frac{\partial}{\partial t}\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t) \tag{3.49}$$

$$=\varepsilon_0\left\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\times\frac{\partial\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}-\varepsilon_0\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\times\left\{\left(\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)+\omega\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\omega}\right)\frac{\partial}{\partial t}\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t) \tag{3.50}$$

$$=\varepsilon_0\left\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\times\frac{\partial\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}-\varepsilon_0\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\times\left\{\left(\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)\right)\frac{\partial}{\partial t}\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t) \tag{3.51}$$

$$-\varepsilon_0\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\times\left\{\left(\omega\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\omega}\right)\frac{\partial}{\partial t}\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t) \tag{3.52}$$

第３項にマックスウェルの方程式 $\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{k}\times\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)/\omega$ を代入して、ベクトル公式 $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=$

$(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}$ を用いて、さらに、ガウスの法則を用いて、

$$\varepsilon_0\left\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\times\frac{\partial\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}-\varepsilon_0\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\times\left\{(\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega))\frac{\partial}{\partial t}\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t) \tag{3.53}$$

$$-\varepsilon_0\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\times\left\{\left(\omega\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\omega}\right)\frac{\partial}{\partial t}\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t) \tag{3.54}$$

$$=\varepsilon_0\left\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\times\frac{\partial\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}-\varepsilon_0\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\times\left\{(\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega))\frac{\partial}{\partial t}\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t) \tag{3.55}$$

$$-\varepsilon_0\left\{\boldsymbol{k}\times\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\right\}\times\left\{\left(\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\omega}\right)\frac{\partial}{\partial t}\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t) \tag{3.56}$$

$$=\varepsilon_0\left\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\times\frac{\partial\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}-\varepsilon_0\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\times\left\{(\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega))\frac{\partial}{\partial t}\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t) \tag{3.57}$$

$$-\varepsilon_0\left[\left(\boldsymbol{k}\cdot\left\{\left(\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\omega}\right)\frac{\partial}{\partial t}\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right)\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)-\left(\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\left\{\left(\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\omega}\right)\frac{\partial}{\partial t}\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right)\boldsymbol{k}\right] \tag{3.58}$$

$$=\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left[\left\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\times\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\right]+\varepsilon_0\left(\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\left\{\left(\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\omega}\right)\frac{\partial}{\partial t}\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right)\boldsymbol{k} \tag{3.59}$$

複素共役との和をとる。

$$\frac{\partial}{\partial t}2\Re\left(\varepsilon_0\left[\left\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\times\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\right]\right) \tag{3.60}$$

$$+\varepsilon_0\left(\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\left\{\left(\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\omega}\right)\frac{\partial}{\partial t}\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right)\boldsymbol{k}+\varepsilon_0\left(\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\left\{\left(\frac{\partial\boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\omega}\right)\frac{\partial}{\partial t}\right\}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\right)\boldsymbol{k} \tag{3.61}$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}2\Re\left(\varepsilon_0\left[\left\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\times\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\right]\right) \tag{3.62}$$

$$+\varepsilon_0\left[\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}+\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\right]\boldsymbol{k} \tag{3.63}$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}2\Re\left(\varepsilon_0\left[\left\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\times\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\right]\right)+\varepsilon_0\sum_{l,m}\left[\bar{E}_l^*\frac{\partial K_{Hlm}}{\partial\omega}\frac{\partial\bar{E}_m}{\partial t}+\bar{E}_m\frac{\partial K_{Hml}^*}{\partial\omega}\frac{\partial\bar{E}_l^*}{\partial t}\right]\boldsymbol{k} \tag{3.64}$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}2\Re\left(\varepsilon_0\left[\left\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\times\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\right]\right)+\varepsilon_0\sum_{l,m}\left[\bar{E}_l^*\frac{\partial K_{Hlm}}{\partial\omega}\frac{\partial\bar{E}_m}{\partial t}+\bar{E}_m\frac{\partial K_{Hlm}}{\partial\omega}\frac{\partial\bar{E}_l^*}{\partial t}\right]\boldsymbol{k} \tag{3.65}$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}2\Re\left(\varepsilon_0\left[\left\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\times\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\right]\right)+\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\sum_{l,m}\left[\frac{\partial K_{Hlm}}{\partial\omega}\bar{E}_l^*\bar{E}_m\right]\boldsymbol{k} \tag{3.66}$$

$$=\frac{\partial}{\partial t}2\Re\left(\varepsilon_0\left[\left\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\times\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\right]\right)+\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\omega}:\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\otimes\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right]\boldsymbol{k} \tag{3.67}$$

5つ目は、マックスウェルの方程式 $\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{k}\times\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)/\omega$ を代入して、$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}$ を用いて、

$$-\varepsilon_0\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\times\{\omega\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k},\omega)\}\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)+\varepsilon_0\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{k}\cdot\left\{\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\} \tag{3.68}$$

$$=-\varepsilon_0\left\{\boldsymbol{k}\times\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\right\}\times\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)+\varepsilon_0\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{k}\cdot\left\{\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\} \tag{3.69}$$

$$=-\varepsilon_0\left[\left\{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)-\left\{\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\boldsymbol{k}\right] \tag{3.70}$$

$$+\varepsilon_0\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{k}\cdot\left\{\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\} \tag{3.71}$$

$$=\varepsilon_0\left\{\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\boldsymbol{k} \tag{3.72}$$

複素共役との和をとって、

$$2\varepsilon_0\left\{\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\boldsymbol{k} \tag{3.73}$$

６つ目は、

$$-2\Re\left(\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{ex}}(\boldsymbol{r},t)\times\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)+\bar{\rho}_{\mathrm{ex}}\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)(\boldsymbol{r},t)\right) \tag{3.74}$$

したがって、

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_0\nabla\cdot\left(\left\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega):\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\otimes\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\boldsymbol{I}-2\Re\left[\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\otimes\left\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\right]\right)\\
&+\frac{1}{\mu_0}\nabla\cdot\left[\left\{\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\right\}\boldsymbol{I}-2\Re\left\{\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)\otimes\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\right\}\right]\\
&-\nabla\cdot\left[\varepsilon_0\boldsymbol{k}\otimes\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\left\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega):\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\otimes\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\right]\\
&+\frac{\partial}{\partial t}2\Re\left(\varepsilon_0\left[\left\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\times\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\right]\right)+\varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\omega}:\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\otimes\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right]\boldsymbol{k}\\
&2\varepsilon_0\left\{\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\boldsymbol{k}\\
&=-2\Re\left(\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{ex}}(\boldsymbol{r},t)\times\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)+\bar{\rho}_{\mathrm{ex}}\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)(\boldsymbol{r},t)\right)
\end{aligned} \tag{3.75}$$

$$\begin{aligned}
&\nabla\cdot\left[\frac{1}{4}\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{k}\otimes\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\right)\left\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega):\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\otimes\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)+\frac{1}{\mu_0}\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\right\}\right.\\
&\left.-\frac{1}{2}\Re\left\{\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\otimes\left\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}+\frac{1}{\mu_0}\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)\otimes\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\right\}\right]\\
&+\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{2}\Re\left(\left\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\times\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\right)+\frac{1}{4}\left[\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\omega}:\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\otimes\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right]\boldsymbol{k}\right]\\
&+\frac{1}{2}\left\{\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\boldsymbol{k}\\
&=-\frac{1}{2}\Re\left(\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{ex}}(\boldsymbol{r},t)\times\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)+\bar{\rho}_{\mathrm{ex}}\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)(\boldsymbol{r},t)\right)
\end{aligned} \tag{3.76}$$

したがって、

$$\boldsymbol{G}=\frac{1}{2}\Re\left(\left\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\times\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\right)+\frac{1}{4}\left[\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)}{\partial\omega}:\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\otimes\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right]\boldsymbol{k} \tag{3.77}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{T}=&\frac{1}{4}\left(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{k}\otimes\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\right)\left\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega):\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\otimes\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)+\frac{1}{\mu_0}\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\right\}\\
&-\frac{1}{2}\Re\left\{\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\otimes\left\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}+\frac{1}{\mu_0}\bar{\boldsymbol{B}}(\boldsymbol{r},t)\otimes\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)\right\}
\end{aligned} \tag{3.78}$$

$$\boldsymbol{F}=\frac{1}{2}\left\{\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k},\omega)\cdot\bar{\boldsymbol{E}}(\boldsymbol{r},t)\right\}\boldsymbol{k} \tag{3.79}$$

$$\boldsymbol{F}_{\mathrm{ex}}=-\frac{1}{2}\Re\left(\bar{\boldsymbol{J}}_{\mathrm{ex}}(\boldsymbol{r},t)\times\bar{\boldsymbol{B}}^*(\boldsymbol{r},t)+\bar{\rho}_{\mathrm{ex}}\bar{\boldsymbol{E}}^*(\boldsymbol{r},t)(\boldsymbol{r},t)\right) \tag{3.80}$$

とすると、

$$\frac{\partial\boldsymbol{G}}{\partial t}+\nabla\cdot\boldsymbol{T}+\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}_{\mathrm{ex}} \tag{3.81}$$

3.2.0.0.1　$\boldsymbol{E}_0\exp\left\{i(\boldsymbol{k}_r+i\boldsymbol{k}_i)\cdot\boldsymbol{r}-i(\omega_r+i\omega_i)t\right\}$ という形になっている場合　外部駆動力も 0 とする。マックスウェルの方程式のうち、電場に関するガウスの法則の式の左辺 $\nabla\cdot\boldsymbol{D}_0\exp\left\{i(\boldsymbol{k}_r+i\boldsymbol{k}_i)\cdot\boldsymbol{r}-i(\omega_r+i\omega_i)t\right\}$

は、

$$
\begin{aligned}
&\nabla\cdot\boldsymbol{D}_0\exp\{i(\boldsymbol{k}_r+i\boldsymbol{k}_i)\cdot\boldsymbol{r}-i(\omega_r+i\omega_i)t\} && (3.82)\\
\cong&\nabla\cdot\varepsilon_0\left\{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\\
&\exp\{i(\boldsymbol{k}_r+i\boldsymbol{k}_i)\cdot\boldsymbol{r}-i(\omega_r+i\omega_i)t\} && (3.83)\\
=&(i\boldsymbol{k}_r-\boldsymbol{k}_i)\cdot\varepsilon_0\left\{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\\
&\exp\{i(\boldsymbol{k}_r+i\boldsymbol{k}_i)\cdot\boldsymbol{r}-i(\omega_r+i\omega_i)t\} && (3.84)\\
\cong&\varepsilon_0\left\{i\boldsymbol{k}_r\cdot\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-\boldsymbol{k}_r\cdot\left\{\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}\right\}-\boldsymbol{k}_r\cdot\omega_i\frac{\partial\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\\
&\exp\{i(\boldsymbol{k}_r+i\boldsymbol{k}_i)\cdot\boldsymbol{r}-i(\omega_r+i\omega_i)t\} && (3.85)
\end{aligned}
$$

マックスウェル方程式の４式は、

$$
\begin{cases}
i\boldsymbol{k}_r\times\boldsymbol{E}_0-\boldsymbol{k}_i\times\boldsymbol{E}_0-i\omega_r\boldsymbol{B}_0+\omega_i\boldsymbol{B}_0=\boldsymbol{0}\\
i\boldsymbol{k}_r\times\boldsymbol{B}_0-\boldsymbol{k}_i\times\boldsymbol{B}_0\\
-\mu_0\varepsilon_0\left\{-i\left(\omega_r\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right)+\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\left(\omega_r\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right)+\omega_i\,\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega)\right)\Big|_{\omega=\omega_r}\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{0}\\
\varepsilon_0\left\{i\boldsymbol{k}_r\cdot\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-\boldsymbol{k}_r\cdot\left\{\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}\right\}-\boldsymbol{k}_r\cdot\omega_i\frac{\partial\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0=0\\
i\boldsymbol{k}_r\cdot\boldsymbol{B}_0-\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{B}_0=0
\end{cases}
\tag{3.86}
$$

マックスウェル方程式の０次の式は、

$$
\begin{cases}
i\boldsymbol{k}_r\times\boldsymbol{E}_0-i\omega_r\boldsymbol{B}_0=\boldsymbol{0}\\
i\boldsymbol{k}_r\times\boldsymbol{B}_0+\mu_0\varepsilon_0 i\omega_r\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{0}\\
i\varepsilon_0\boldsymbol{k}_r\cdot\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0=0\\
i\boldsymbol{k}_r\cdot\boldsymbol{B}_0=0
\end{cases}
\tag{3.87}
$$

マックスウェル方程式の１次の式は、

$$
\begin{cases}
-\boldsymbol{k}_i\times\boldsymbol{E}_0+\omega_i\boldsymbol{B}_0=\boldsymbol{0}\\
-\boldsymbol{k}_i\times\boldsymbol{B}_0\\
-\mu_0\varepsilon_0\left\{\omega_r\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\left(\omega_r\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right)+\omega_i\,\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega)\right)\Big|_{\omega=\omega_r}\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{0}\\
\varepsilon_0\left\{-\boldsymbol{k}_r\cdot\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-\boldsymbol{k}_r\cdot\left\{\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}\right\}-\boldsymbol{k}_r\cdot\omega_i\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0=0\\
-\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{B}_0=0
\end{cases}
\tag{3.88}
$$

第１式の複素共役に、左から $\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0$ を掛ける。

$$
-\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_R)\cdot\boldsymbol{E}_0\}\times(\boldsymbol{k}_i\times\boldsymbol{E}_0^*)+\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\}\times\omega_i\boldsymbol{B}_0^*=\boldsymbol{0}
\tag{3.89}
$$

第２式に、左から $\boldsymbol{B}_0^*/\mu_0$ を掛ける。

$$
\begin{aligned}
&-\frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0}\times(\boldsymbol{k}_i\times\boldsymbol{B}_0)\\
&-\frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0}\times\mu_0\varepsilon_0\left\{\omega_r\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\left(\omega_r\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right)+\omega_i\left.\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega)\right)\right|_{\omega=\omega_r}\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{0}
\end{aligned}
\tag{3.90}
$$

第３式に $\boldsymbol{E}_0^*$ を掛けると、

$$
\boldsymbol{E}_0^*\varepsilon_0\left\{-\boldsymbol{k}_r\cdot\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-\boldsymbol{k}_r\cdot\left\{\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}\right\}-\boldsymbol{k}_r\cdot\omega_i\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0=\boldsymbol{0}
\tag{3.91}
$$

第４式の複素共役に $\boldsymbol{B}_0/\mu_0$ を掛けると、

$$
-\frac{\boldsymbol{B}_0}{\mu_0}\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{B}_0^*=\boldsymbol{0}
\tag{3.92}
$$

（第１式）＋（第２式）－（第３式）－（第４式）をする。

$$
\begin{aligned}
&-\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\}\times(\boldsymbol{k}_i\times\boldsymbol{E}_0^*)+\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\}\times\omega_i\boldsymbol{B}_0^*\\
&-\frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0}\times(\boldsymbol{k}_i\times\boldsymbol{B}_0)\\
&-\frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0}\times\mu_0\varepsilon_0\left\{\omega_r\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\left(\omega_r\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right)+\omega_i\left.\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega)\right)\right|_{\omega=\omega_r}\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\\
&-\boldsymbol{E}_0^*\varepsilon_0\left\{-\boldsymbol{k}_r\cdot\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-\boldsymbol{k}_r\cdot\left\{\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}\right\}-\boldsymbol{k}_r\cdot\omega_i\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\\
&+\frac{\boldsymbol{B}_0}{\mu_0}\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{B}_0^*=\boldsymbol{0}
\end{aligned}
\tag{3.93}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\}\times(\boldsymbol{k}_i\times\boldsymbol{E}_0^*)+\boldsymbol{E}_0^*\{\boldsymbol{k}_i\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\}\\
&-\frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0}\times(\boldsymbol{k}_i\times\boldsymbol{B}_0)+\frac{\boldsymbol{B}_0}{\mu_0}\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{B}_0^*\\
&-\boldsymbol{B}_0^*\times\left\{\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\left(\omega_r\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right)\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}+\boldsymbol{E}_0^*\left\{\boldsymbol{k}_r\cdot\left\{\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}\\
&+\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\}\times\omega_i\boldsymbol{B}_0^*-\boldsymbol{B}_0^*\times\left\{\omega_i\left.\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega)\right)\right|_{\omega=\omega_r}\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}\\
&+\boldsymbol{E}_0^*\left\{\boldsymbol{k}_r\cdot\omega_i\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}\\
&-\boldsymbol{B}_0^*\times\{\omega_r\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\}+\boldsymbol{E}_0^*\{\boldsymbol{k}_r\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\}=\boldsymbol{0}
\end{aligned}
\tag{3.94}
$$

この式と、この式の複素共役との和を取る。ややこしくなるので、数個に分解する。

１つ目は、ベクトル公式 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$ を用いて、

$$
\begin{aligned}
&-\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\}\times(\boldsymbol{k}_i\times\boldsymbol{E}_0^*)+\boldsymbol{E}_0^*\{\boldsymbol{k}_i\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\}\\
&-\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0^*\}\times(\boldsymbol{k}_i\times\boldsymbol{E}_0)+\boldsymbol{E}_0\{\boldsymbol{k}_i\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0^*\}\\
=&-[\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\}\cdot\boldsymbol{E}_0^*]\,\boldsymbol{k}_i+[\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\}\cdot\boldsymbol{k}_i]\,\boldsymbol{E}_0^*+\boldsymbol{E}_0^*\{\boldsymbol{k}_i\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\}\\
&-[\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0^*\}\cdot\boldsymbol{E}_0]\,\boldsymbol{k}_i+[\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0^*\}\cdot\boldsymbol{k}_i]\,\boldsymbol{E}_0+\boldsymbol{E}_0\{\boldsymbol{k}_i\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0^*\} \quad (3.95)\\
=&-[\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\}\cdot\boldsymbol{E}_0^*]\,\boldsymbol{k}_i+2\,[\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\}\cdot\boldsymbol{k}_i]\,\boldsymbol{E}_0^*\\
&-[\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0^*\}\cdot\boldsymbol{E}_0]\,\boldsymbol{k}_i+2\,[\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0^*\}\cdot\boldsymbol{k}_i]\,\boldsymbol{E}_0 \quad (3.96)\\
=&-\left[\sum_{l,m}\varepsilon_0K_{Hlm}E_{0m}E_{0l}^*\right]\boldsymbol{k}_i+2\left[\sum_l\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\}_l\,k_{il}\right]\begin{pmatrix}E_{0X}^* & E_{0Y}^* & E_{0Z}^*\end{pmatrix}\\
&-\left[\sum_{l,m}\varepsilon_0K_{Hml}^*E_{0l}^*E_{0m}\right]\boldsymbol{k}_i+2\left[\sum_l\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0^*\}_l\,k_{il}\right]\begin{pmatrix}E_{0X} & E_{0Y} & E_{0Z}\end{pmatrix} \quad (3.97)\\
=&-\left[\sum_{l,m}\varepsilon_0K_{Hlm}E_{0m}E_{0l}^*\right]\boldsymbol{k}_i\\
&+2\left(\left[\textstyle\sum_l\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\}_l\,k_{il}\right]E_{0X}^*\quad\left[\textstyle\sum_l\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\}_l\,k_{il}\right]E_{0Y}^*\quad\left[\textstyle\sum_l\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\}_l\,k_{il}\right]E_{0Z}^*\right)\\
&-\left[\sum_{l,m}\varepsilon_0K_{Hlm}E_{0l}^*E_{0m}\right]\boldsymbol{k}_i\\
&+2\left(\left[\textstyle\sum_l\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0^*\}_l\,k_{il}\right]E_{0X}\quad\left[\textstyle\sum_l\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0^*\}_l\,k_{il}\right]E_{0Y}\quad\left[\textstyle\sum_l\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0^*\}_l\,k_{il}\right]E_{0Z}\right)\\
&\quad (3.98)\\
=&-2\left[\sum_{l,m}\varepsilon_0K_{Hlm}E_{0m}E_{0l}^*\right]\boldsymbol{k}_i\\
&+2\begin{pmatrix}k_{iX} & k_{iY} & k_{iZ}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\}_X E_{0X}^* & \{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\}_X E_{0Y}^* & \{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\}_X E_{0Z}^*\\ \{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\}_Y E_{0X}^* & \{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\}_Y E_{0Y}^* & \{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\}_Y E_{0Z}^*\\ \{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\}_Z E_{0X}^* & \{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\}_Z E_{0Y}^* & \{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\}_Z E_{0Z}^*\end{pmatrix}\\
&+2\begin{pmatrix}k_{iX} & k_{iY} & k_{iZ}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0^*\}_X E_{0X} & \{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0^*\}_X E_{0Y} & \{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0^*\}_X E_{0Z}\\ \{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0^*\}_Y E_{0X} & \{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0^*\}_Y E_{0Y} & \{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0^*\}_Y E_{0Z}\\ \{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0^*\}_Z E_{0X} & \{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0^*\}_Z E_{0Y} & \{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0^*\}_Z E_{0Z}\end{pmatrix}\\
&\quad (3.99)\\
=&-2\left[\sum_{l,m}\varepsilon_0K_{Hlm}E_{0m}E_{0l}^*\right]\boldsymbol{k}_i+2\boldsymbol{k}_i\cdot[\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\}\otimes\boldsymbol{E}_0^*]+2\boldsymbol{k}_i\cdot[\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0^*\}\otimes\boldsymbol{E}_0]\\
&\quad (3.100)\\
=&-2\boldsymbol{k}_i\cdot\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r):\boldsymbol{E}_0^*\otimes\boldsymbol{E}_0\}\,\boldsymbol{I}+4\Re\,(\boldsymbol{k}_i\cdot[\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\}\otimes\boldsymbol{E}_0^*]) \quad (3.101)\\
=&2\boldsymbol{k}_i\cdot\{2\Re\,(\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\}\otimes\boldsymbol{E}_0^*)-\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r):\boldsymbol{E}_0^*\otimes\boldsymbol{E}_0\}\,\boldsymbol{I}\} \quad (3.102)
\end{aligned}
$$

２つ目もベクトル公式 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$ を用いて、

$$-\frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0}\times(\boldsymbol{k}_i\times\boldsymbol{B}_0)+\frac{\boldsymbol{B}_0}{\mu_0}\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{B}_0^*-\frac{\boldsymbol{B}_0}{\mu_0}\times(\boldsymbol{k}_i\times\boldsymbol{B}_0^*)+\frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0}\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{B}_0 \tag{3.103}$$

$$=-\left[\frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0}\cdot\boldsymbol{B}_0\right]\boldsymbol{k}_i+\left[\frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0}\cdot\boldsymbol{k}_i\right]\boldsymbol{B}_0+\frac{\boldsymbol{B}_0}{\mu_0}\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{B}_0^*-\left[\frac{\boldsymbol{B}_0}{\mu_0}\cdot\boldsymbol{B}_0^*\right]\boldsymbol{k}_i+\left[\frac{\boldsymbol{B}_0}{\mu_0}\cdot\boldsymbol{k}_i\right]\boldsymbol{B}_0^*+\frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0}\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{B}_0 \tag{3.104}$$

$$=-2\left[\frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0}\cdot\boldsymbol{B}_0\right]\boldsymbol{k}_i+2\left[\frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0}\cdot\boldsymbol{k}_i\right]\boldsymbol{B}_0+2\left[\frac{\boldsymbol{B}_0}{\mu_0}\cdot\boldsymbol{k}_i\right]\boldsymbol{B}_0^* \tag{3.105}$$

$$=-2\begin{pmatrix}k_{iX} & k_{iY} & k_{iZ}\end{pmatrix}\left[\frac{1}{\mu_0}\sum_l B_{0l}^*B_{0l}\right] \tag{3.106}$$

$$+2\frac{1}{\mu_0}\begin{pmatrix}\sum_l B_{0l}^*k_{il}B_{0X} & \sum_l B_{0l}^*k_{il}B_{0Y} & \sum_l B_{0l}^*k_{il}B_{0Z}\end{pmatrix} \tag{3.107}$$

$$+2\frac{1}{\mu_0}\begin{pmatrix}\sum_l B_{0l}k_{il}B_{0X}^* & \sum_l B_{0l}k_{il}B_{0Y}^* & \sum_l B_{0l}k_{il}B_{0Z}^*\end{pmatrix} \tag{3.108}$$

$$=-2\frac{1}{\mu_0}\begin{pmatrix}k_{iX} & k_{iY} & k_{iZ}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sum_l B_{0l}^*B_{0l} & 0 & 0\\ 0 & \sum_l B_{0l}^*B_{0l} & 0\\ 0 & 0 & \sum_l B_{0l}^*B_{0l}\end{pmatrix} \tag{3.109}$$

$$+2\frac{1}{\mu_0}\begin{pmatrix}k_{iX} & k_{iY} & k_{iZ}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{0X}^*B_{0X} & B_{0X}^*B_{0Y} & B_{0X}^*B_{0Z}\\ B_{0Y}^*B_{0X} & B_{0Y}^*B_{0Y} & B_{0Y}^*B_{0Z}\\ B_{0Z}^*B_{0X} & B_{0Z}^*B_{0Y} & B_{0Z}^*B_{0Z}\end{pmatrix} \tag{3.110}$$

$$+2\frac{1}{\mu_0}\begin{pmatrix}k_{iX} & k_{iY} & k_{iZ}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{0X}B_{0X}^* & B_{0X}B_{0Y}^* & B_{0X}B_{0Z}^*\\ B_{0Y}B_{0X}^* & B_{0Y}B_{0Y}^* & B_{0Y}B_{0Z}^*\\ B_{0Z}B_{0X}^* & B_{0Z}B_{0Y}^* & B_{0Z}B_{0Z}^*\end{pmatrix} \tag{3.111}$$

$$=-2\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{k}_i\cdot(\boldsymbol{B}_0^*\cdot\boldsymbol{B}_0)\,\boldsymbol{I}+2\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{k}_i\cdot(\boldsymbol{B}_0^*\otimes\boldsymbol{B}_0)+2\frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{k}_i\cdot(\boldsymbol{B}_0\otimes\boldsymbol{B}_0^*) \tag{3.112}$$

$$=\frac{2}{\mu_0}\boldsymbol{k}_i\cdot\{2\Re(\boldsymbol{B}_0^*\otimes\boldsymbol{B}_0)-(\boldsymbol{B}_0^*\cdot\boldsymbol{B}_0)\,\boldsymbol{I}\} \tag{3.113}$$

３つ目は、

$$-\boldsymbol{B}_0^*\times\left\{\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}(\omega_r\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r))\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}+\boldsymbol{E}_0^*\left\{\boldsymbol{k}_r\cdot\left\{\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right\} \tag{3.114}$$

であるが、マックスウェルの方程式の近似式 $\boldsymbol{B}_0^*=\boldsymbol{k}_r\times\boldsymbol{E}_0^*/\omega_r$ を代入して、

$$=-\frac{\boldsymbol{k}_r\times\boldsymbol{E}_0^*}{\omega_r}\times\left\{\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}(\omega_r\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r))\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}+\boldsymbol{E}_0^*\left\{\boldsymbol{k}_r\cdot\left\{\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right\} \tag{3.115}$$

$$=-(\boldsymbol{k}_r\times\boldsymbol{E}_0^*)\times\left\{\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}(\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r))\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}+\boldsymbol{E}_0^*\left\{\boldsymbol{k}_r\cdot\left\{\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right\} \tag{3.116}$$

ベクトル公式 $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}$ を用いて、

$$
\begin{aligned}
&= -\left(\boldsymbol{k}_r\times\boldsymbol{E}_0^*\right)\times\left\{\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\left(\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right)\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}+\boldsymbol{E}_0^*\left\{\boldsymbol{k}_r\cdot\left\{\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right\} && (3.117)\\
&= -\left[\boldsymbol{k}_r\cdot\left\{\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\left(\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right)\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}\right]\boldsymbol{E}_0^*+\left[\boldsymbol{E}_0^*\cdot\left\{\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\left(\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right)\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}\right]\boldsymbol{k}_r && (3.118)\\
&\quad+\boldsymbol{E}_0^*\left\{\boldsymbol{k}_r\cdot\left\{\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right\} && (3.119)\\
&= \left[\boldsymbol{E}_0^*\cdot\left\{\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}\right]\boldsymbol{k}_r && (3.120)
\end{aligned}
$$

複素共役との和をとると、

$$
\begin{aligned}
&\left[\boldsymbol{E}_0^*\cdot\left\{\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}\right]\boldsymbol{k}_r+\left[\boldsymbol{E}_0\cdot\left\{\boldsymbol{k}_i\cdot\left\{\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}\right\}^*\cdot\boldsymbol{E}_0^*\right\}\right]\boldsymbol{k}_r && (3.121)\\
&= \left[\boldsymbol{E}_0^*\cdot\left\{\sum_l k_{il}\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial k_l}\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}\right]\boldsymbol{k}_r+\left[\boldsymbol{E}_0\cdot\left\{\sum_l k_{il}\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial k_l}\cdot\boldsymbol{E}_0^*\right\}\right]\boldsymbol{k}_r && (3.122)\\
&= \left\{\sum_{l,m,n}k_{il}E_{0m}^*\frac{\partial\varepsilon_0K_{Hmn}}{\partial k_l}E_{0n}\right\}\boldsymbol{k}_r+\left\{\sum_{l,m,n}k_{il}E_{0n}\frac{\partial\varepsilon_0K_{Hnm}^*}{\partial k_l}E_{0m}^*\right\}\boldsymbol{k}_r && (3.123)\\
&= \left\{\sum_{l,m,n}k_{il}E_{0m}^*\frac{\partial\varepsilon_0K_{Hmn}}{\partial k_l}E_{0n}\right\}\boldsymbol{k}_r+\left\{\sum_{l,m,n}k_{il}E_{0n}\frac{\partial\varepsilon_0K_{Hmn}}{\partial k_l}E_{0m}^*\right\}\boldsymbol{k}_r && (3.124)\\
&=2\begin{pmatrix}k_{rX} & k_{rY} & k_{rZ}\end{pmatrix}\left\{\sum_l k_{il}\frac{\partial}{\partial k_l}\left\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r):\boldsymbol{E}_0^*\otimes\boldsymbol{E}_0\right\}\right\} && (3.125)\\
&=2\begin{pmatrix}k_{rX}\sum_l k_{il}\frac{\partial}{\partial k_l} & k_{rY}\sum_l k_{il}\frac{\partial}{\partial k_l} & k_{rZ}\sum_l k_{il}\frac{\partial}{\partial k_l}\end{pmatrix}\left\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r):\boldsymbol{E}_0^*\otimes\boldsymbol{E}_0\right\} && (3.126)\\
&=2\begin{pmatrix}k_{iX} & k_{iY} & k_{iZ}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}k_{rX}\frac{\partial}{\partial k_X} & k_{rY}\frac{\partial}{\partial k_X} & k_{rZ}\frac{\partial}{\partial k_X}\\ k_{rX}\frac{\partial}{\partial k_Y} & k_{rY}\frac{\partial}{\partial k_Y} & k_{rZ}\frac{\partial}{\partial k_Y}\\ k_{rX}\frac{\partial}{\partial k_Z} & k_{rY}\frac{\partial}{\partial k_Z} & k_{rZ}\frac{\partial}{\partial k_Z}\end{pmatrix}\left\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r):\boldsymbol{E}_0^*\otimes\boldsymbol{E}_0\right\} && (3.127)\\
&=2\boldsymbol{k}_i\cdot\left(\boldsymbol{k}_r\otimes\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\right)^T\left\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r):\boldsymbol{E}_0^*\otimes\boldsymbol{E}_0\right\} && (3.128)
\end{aligned}
$$

４つ目は、

$$
\begin{aligned}
&\left\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}\times\omega_i\boldsymbol{B}_0^*-\boldsymbol{B}_0^*\times\left\{\omega_i\ \frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega)\right)\Big|_{\omega=\omega_r}\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}\\
&\quad+\boldsymbol{E}_0^*\left\{\boldsymbol{k}_r\cdot\omega_i\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\cdot\boldsymbol{E}_0\right\} && (3.129)
\end{aligned}
$$

であるが、第３項は０次のガウスの法則によりほぼゼロになる。

$$=\{\varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\}\times\omega_i\boldsymbol{B}_0^* - \boldsymbol{B}_0^*\times\left\{\omega_i\ \frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega)\right)\Big|_{\omega=\omega_r}\cdot\boldsymbol{E}_0\right\} \tag{3.130}$$

$$=\{\varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\}\times\omega_i\boldsymbol{B}_0^* - \boldsymbol{B}_0^*\times\{\omega_i\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\}$$
$$-\boldsymbol{B}_0^*\times\left\{\omega_i\omega_r\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\cdot\boldsymbol{E}_0\right\} \tag{3.131}$$

$$=2\{\varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\}\times\omega_i\boldsymbol{B}_0^* - \boldsymbol{B}_0^*\times\left\{\omega_i\omega_r\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\cdot\boldsymbol{E}_0\right\} \tag{3.132}$$

第３項にマックスウェルの方程式 $\boldsymbol{B}_0^*=\boldsymbol{k}_r\times\boldsymbol{E}_0^*/\omega_r$ を代入して、ベクトル公式 $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}$ を用いて、さらに、ガウスの法則を用いて、

$$=2\{\varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\}\times\omega_i\boldsymbol{B}_0^* - (\boldsymbol{k}_r\times\boldsymbol{E}_0^*)\times\left\{\omega_i\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\cdot\boldsymbol{E}_0\right\} \tag{3.133}$$

$$=2\{\varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\}\times\omega_i\boldsymbol{B}_0^*$$
$$-\left(\boldsymbol{k}_r\cdot\left\{\omega_i\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}\right)\boldsymbol{E}_0^* + \left(\boldsymbol{E}_0^*\cdot\left\{\omega_i\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}\right)\boldsymbol{k}_r \tag{3.134}$$

$$=2\{\varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\}\times\omega_i\boldsymbol{B}_0^* + \left(\boldsymbol{E}_0^*\cdot\left\{\omega_i\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}\right)\boldsymbol{k}_r \tag{3.135}$$

複素共役との和をとる。

$$2\{\varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\}\times\omega_i\boldsymbol{B}_0^* + \left(\boldsymbol{E}_0^*\cdot\left\{\omega_i\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}\right)\boldsymbol{k}_r \tag{3.136}$$

$$+2\{\varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0^*\}\times\omega_i\boldsymbol{B}_0 + \left(\boldsymbol{E}_0\cdot\left\{\omega_i\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\cdot\boldsymbol{E}_0^*\right\}\right)\boldsymbol{k}_r \tag{3.137}$$

$$=4\omega_i\Re\left[\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\}\times\boldsymbol{B}_0^*\right] \tag{3.138}$$

$$+\omega_i\left\{\boldsymbol{E}_0^*\cdot\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}\boldsymbol{k}_r + \omega_i\left\{\boldsymbol{E}_0\cdot\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\cdot\boldsymbol{E}_0^*\right\}\boldsymbol{k}_r \tag{3.139}$$

$$=4\omega_i\Re\left[\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\}\times\boldsymbol{B}_0^*\right] \tag{3.140}$$

$$+\omega_i\sum_{m,n}\left\{E_{0m}^*\frac{\partial\varepsilon_0 K_{Hmn}}{\partial\omega}E_{0n}\right\}\boldsymbol{k}_r + \sum_{m,n}\omega_i\left\{E_{0n}\frac{\partial\varepsilon_0 K_{Hnm}^*}{\partial\omega}E_{0m}^*\right\}\boldsymbol{k}_r \tag{3.141}$$

$$=4\omega_i\Re\left[\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\}\times\boldsymbol{B}_0^*\right] \tag{3.142}$$

$$+\omega_i\sum_{m,n}\left\{E_{0m}^*\frac{\partial\varepsilon_0 K_{Hmn}}{\partial\omega}E_{0n}\right\}\boldsymbol{k}_r + \sum_{m,n}\omega_i\left\{E_{0n}\frac{\partial\varepsilon_0 K_{Hmn}}{\partial\omega}E_{0m}^*\right\}\boldsymbol{k}_r \tag{3.143}$$

$$=4\omega_i\Re\left[\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\}\times\boldsymbol{B}_0^*\right] + 2\omega_i\left\{\boldsymbol{E}_0^*\cdot\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}\boldsymbol{k}_r \tag{3.144}$$

$$=2\omega_i\left(2\Re\left[\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\}\times\boldsymbol{B}_0^*\right] + \left\{\boldsymbol{E}_0^*\cdot\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}\boldsymbol{k}_r\right) \tag{3.145}$$

５つ目は、マックスウェルの方程式の近似 $\boldsymbol{B}_0^*=\boldsymbol{k}_r\times\boldsymbol{E}_0^*/\omega_r$ を代入して、$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{A}$

を用いて、

$$
\begin{aligned}
&-\boldsymbol{B}_0^* \times \{\omega_r \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \cdot \boldsymbol{E}_0\} + \boldsymbol{E}_0^* \{\boldsymbol{k}_r \cdot \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \cdot \boldsymbol{E}_0\} && (3.146)\\
=&-(\boldsymbol{k}_r \times \boldsymbol{E}_0^*) \times \{\varepsilon_0 \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \cdot \boldsymbol{E}_0\} + \boldsymbol{E}_0^* \{\boldsymbol{k}_r \cdot \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \cdot \boldsymbol{E}_0\} && (3.147)\\
=&-[(\boldsymbol{k}_r \cdot \{\varepsilon_0 \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \cdot \boldsymbol{E}_0\}) \boldsymbol{E}_0^* - (\boldsymbol{E}_0^* \cdot \{\varepsilon_0 \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \cdot \boldsymbol{E}_0\}) \boldsymbol{k}_r] + \boldsymbol{E}_0^* \{\boldsymbol{k}_r \cdot \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \cdot \boldsymbol{E}_0\} && (3.148)\\
=&(\boldsymbol{E}_0^* \cdot \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \cdot \boldsymbol{E}_0) \boldsymbol{k}_r && (3.149)
\end{aligned}
$$

複素共役との和をとって、

$$
2 (\boldsymbol{E}_0^* \cdot \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \cdot \boldsymbol{E}_0) \boldsymbol{k}_r \tag{3.150}
$$

したがって、

$$
\begin{aligned}
&2\boldsymbol{k}_i \cdot \{2\Re (\{\varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \cdot \boldsymbol{E}_0\} \otimes \boldsymbol{E}_0^*) - \{\varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) : \boldsymbol{E}_0^* \otimes \boldsymbol{E}_0\} \boldsymbol{I}\} && (3.151)\\
&+ \frac{2}{\mu_0} \boldsymbol{k}_i \cdot \{2\Re (\boldsymbol{B}_0^* \otimes \boldsymbol{B}_0) - (\boldsymbol{B}_0^* \cdot \boldsymbol{B}_0) \boldsymbol{I}\} && (3.152)\\
&+ 2\boldsymbol{k}_i \cdot \left(\boldsymbol{k}_r \otimes \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\right)^T \{\varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) : \boldsymbol{E}_0^* \otimes \boldsymbol{E}_0\} && (3.153)\\
&+ 2\omega_i \left(2\Re [\{\varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \cdot \boldsymbol{E}_0\} \times \boldsymbol{B}_0^*] + \left\{\boldsymbol{E}_0^* \cdot \frac{\partial \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \omega} \cdot \boldsymbol{E}_0\right\} \boldsymbol{k}_r\right) && (3.154)\\
&+ 2 (\boldsymbol{E}_0^* \cdot \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \cdot \boldsymbol{E}_0) \boldsymbol{k}_r && (3.155)\\
=&2\boldsymbol{k}_i \cdot \left[2\Re \left(\{\varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \cdot \boldsymbol{E}_0\} \otimes \boldsymbol{E}_0^* + \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{B}_0^* \otimes \boldsymbol{B}_0\right)\right. && (3.156)\\
&\left.- \left(\boldsymbol{I} - \left(\boldsymbol{k}_r \otimes \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\right)^T\right) \left\{\varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) : \boldsymbol{E}_0^* \otimes \boldsymbol{E}_0 + \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{B}_0^* \cdot \boldsymbol{B}_0\right\}\right] && (3.157)\\
&+ 2\omega_i \left(2\Re [\{\varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \cdot \boldsymbol{E}_0\} \times \boldsymbol{B}_0^*] + \left\{\boldsymbol{E}_0^* \cdot \frac{\partial \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \omega} \cdot \boldsymbol{E}_0\right\} \boldsymbol{k}_r\right) && (3.158)\\
&+ 2 (\boldsymbol{E}_0^* \cdot \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \cdot \boldsymbol{E}_0) \boldsymbol{k}_r && (3.159)\\
=&\boldsymbol{0} && (3.160)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- 2\boldsymbol{k}_i \cdot \left[-\frac{1}{2}\Re \left(\{\varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \cdot \boldsymbol{E}_0\} \otimes \boldsymbol{E}_0^* + \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{B}_0^* \otimes \boldsymbol{B}_0\right)\right. && (3.161)\\
&\left.+\frac{1}{4} \left(\boldsymbol{I} - \left(\boldsymbol{k}_r \otimes \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\right)^T\right) \left\{\varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) : \boldsymbol{E}_0^* \otimes \boldsymbol{E}_0 + \frac{1}{\mu_0} \boldsymbol{B}_0^* \cdot \boldsymbol{B}_0\right\}\right] && (3.162)\\
&+ 2\omega_i \left(\frac{1}{2}\Re [\{\varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \cdot \boldsymbol{E}_0\} \times \boldsymbol{B}_0^*] + \frac{1}{4} \left\{\boldsymbol{E}_0^* \cdot \frac{\partial \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \omega} \cdot \boldsymbol{E}_0\right\} \boldsymbol{k}_r\right) && (3.163)\\
&+ \frac{1}{2} (\boldsymbol{E}_0^* \cdot \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \cdot \boldsymbol{E}_0) \boldsymbol{k}_r && (3.164)\\
=&\boldsymbol{0} && (3.165)
\end{aligned}
$$

したがって、

$$\boldsymbol{G} = \frac{1}{2}\Re\left[\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\}\times\boldsymbol{B}_0^*\right] + \frac{1}{4}\left\{\boldsymbol{E}_0^*\cdot\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}\boldsymbol{k}_r \tag{3.166}$$

$$\boldsymbol{T} = -\frac{1}{2}\Re\left(\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\}\otimes\boldsymbol{E}_0^* + \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}_0^*\otimes\boldsymbol{B}_0\right) \tag{3.167}$$

$$+\frac{1}{4}\left(\boldsymbol{I} - \left(\boldsymbol{k}_r\otimes\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\right)^T\right)\left\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) : \boldsymbol{E}_0^*\otimes\boldsymbol{E}_0 + \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}_0^*\cdot\boldsymbol{B}_0\right\} \tag{3.168}$$

$$\boldsymbol{F} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{E}_0^*\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\right)\boldsymbol{k}_r \tag{3.169}$$

とすると、

$$2\omega_i\boldsymbol{G} - 2\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{T} + \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0} \tag{3.170}$$

3.2.0.0.2　近似しなかった場合　外部駆動力も 0 とする。マックスウェルの方程式のうち、電場に関するガウスの法則の式の左辺 $\nabla\cdot\boldsymbol{D}_0\exp\{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - i\omega t\}$ は、

$$\nabla\cdot\boldsymbol{D}_0\exp\{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - i\omega t\}$$

$$\cong\nabla\cdot\varepsilon_0\left\{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) + i\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) + i\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\exp\{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - i\omega t\} \tag{3.171}$$

$$= i\boldsymbol{k}\cdot\varepsilon_0\left\{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) + i\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) + i\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\exp\{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - i\omega t\} \tag{3.172}$$

$$= \varepsilon_0\left\{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) - \boldsymbol{k}\cdot\left(\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right) - \boldsymbol{k}\cdot\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\exp\{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r} - i\omega t\} \tag{3.173}$$

したがって、マックスウェル方程式の４式は、

$$\begin{cases} i\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}_0 - i\omega\boldsymbol{B}_0 = \boldsymbol{0} \\ i\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B}_0 - \mu_0\varepsilon_0\left\{-i\omega\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) + \omega\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) + \omega\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{0} \\ \varepsilon_0\left\{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) - \boldsymbol{k}\cdot\left(\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right) - \boldsymbol{k}\cdot\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0 = 0 \\ i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{B}_0 = 0 \end{cases} \tag{3.174}$$

第１式の複素共役に、左から $\varepsilon_0\left\{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) + i\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) + i\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0$ を掛ける。

$$-i\left\{\varepsilon_0\left\{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) + i\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) + i\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}\times(\boldsymbol{k}^*\times\boldsymbol{E}_0^*)$$

$$+i\left\{\varepsilon_0\left\{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) + i\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) + i\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}\times\omega^*\boldsymbol{B}_0^* = \boldsymbol{0} \tag{3.175}$$

第２式に、左から $\boldsymbol{B}_0^*/\mu_0$ を掛ける。

$$i\frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B}_0) - \varepsilon_0\boldsymbol{B}_0^*\times\left\{-i\omega\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) + \omega\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}} + \omega\omega_i\frac{\partial\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{0} \tag{3.176}$$

第３式に $\boldsymbol{E}_0^*$ を掛けると、

$$\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0^*\left[\left\{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) - \boldsymbol{k}\cdot\left(\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right) - \boldsymbol{k}\cdot\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right] = \boldsymbol{0} \tag{3.177}$$

$$\tag{3.178}$$

第４式の複素共役に $\boldsymbol{B}_0/\mu_0$ を掛けると、

$$-i\frac{\boldsymbol{B}_0}{\mu_0}\left[\boldsymbol{k}^*\cdot\boldsymbol{B}_0^*\right]=\boldsymbol{0} \tag{3.179}$$

（第１式）＋（第２式）－（第３式）－（第４式）をする。

$$\begin{aligned}
&-i\left\{\varepsilon_0\left\{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}\times(\boldsymbol{k}^*\times\boldsymbol{E}_0^*)\\
&+i\left\{\varepsilon_0\left\{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}\times\omega^*\boldsymbol{B}_0^*\\
&+\left[i\frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B}_0)-\varepsilon_0\boldsymbol{B}_0^*\times\left\{-i\omega\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+\omega\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}+\omega\omega_i\frac{\partial\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right]\\
&-\left[\varepsilon_0\boldsymbol{E}_0^*\left[\left\{i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-\boldsymbol{k}\cdot\left(\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right)-\boldsymbol{k}\cdot\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right]\right]\\
&-\left[-i\frac{\boldsymbol{B}_0}{\mu_0}\left[\boldsymbol{k}^*\cdot\boldsymbol{B}_0^*\right]\right]=\boldsymbol{0}
\end{aligned} \tag{3.180}$$

$$\begin{aligned}
&-i\left\{\left\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\varepsilon_0\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\varepsilon_0\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}\times(\boldsymbol{k}^*\times\boldsymbol{E}_0^*)\\
&-\boldsymbol{E}_0^*\left[i\boldsymbol{k}\cdot\left\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\left(\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\right)\varepsilon_0\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\varepsilon_0\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right]\\
&+i\frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B}_0)+i\frac{\boldsymbol{B}_0}{\mu_0}\left[\boldsymbol{k}^*\cdot\boldsymbol{B}_0^*\right]\\
&+i\left\{\left\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\varepsilon_0\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\varepsilon_0\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}\times\omega^*\boldsymbol{B}_0^*\\
&-i\left\{\left\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}+i\omega_i\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}\times\omega\boldsymbol{B}_0^*=\boldsymbol{0}
\end{aligned} \tag{3.181}$$

ベクトル公式 $\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B}-(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$ を用いて、

$$\begin{aligned}
&-i\left(\left\{\left\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\varepsilon_0\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\varepsilon_0\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0^*\right)\boldsymbol{k}^*\\
&+\left(\left\{\left\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\varepsilon_0\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\varepsilon_0\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}\cdot i\boldsymbol{k}^*\right)\boldsymbol{E}_0^*\\
&-\boldsymbol{E}_0^*\left[i\boldsymbol{k}\cdot\left\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\left(\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\right)\varepsilon_0\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\varepsilon_0\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right]\\
&+i\left(\frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0}\cdot\boldsymbol{B}_0\right)\boldsymbol{k}-i\left(\frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0}\cdot\boldsymbol{k}\right)\boldsymbol{B}_0+i\frac{\boldsymbol{B}_0}{\mu_0}\left[\boldsymbol{k}^*\cdot\boldsymbol{B}_0^*\right]\\
&+i\left\{\left\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\varepsilon_0\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\varepsilon_0\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}\times\omega^*\boldsymbol{B}_0^*\\
&-i\left\{\left\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}+i\omega_i\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}\times\omega\boldsymbol{B}_0^*=\boldsymbol{0}
\end{aligned} \tag{3.182}$$

$$
\begin{aligned}
&- i\left(\boldsymbol{E}_0^* \cdot \left\{\varepsilon_0 \boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) + i\boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\varepsilon_0 \boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) + i\omega_i \frac{\partial}{\partial \omega}\varepsilon_0 \boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\} \cdot \boldsymbol{E}_0\right)\boldsymbol{k}^* \\
&- \boldsymbol{E}_0^* \left[i\left(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}^*\right) \cdot \left\{\varepsilon_0 \boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) + i\left(\boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\right)\varepsilon_0 \boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) + i\omega_i \frac{\partial}{\partial \omega}\varepsilon_0 \boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\} \cdot \boldsymbol{E}_0\right] \\
&+ i\left(\frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0} \cdot \boldsymbol{B}_0\right)\boldsymbol{k} - i\left(\frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0} \cdot \left(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}^*\right)\right)\boldsymbol{B}_0 \\
&- i\left\{\left\{\varepsilon_0 \boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) + i\boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial \varepsilon_0 \boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}} + i\omega_i \frac{\partial \varepsilon_0 \boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \omega}\right\} \cdot \boldsymbol{E}_0\right\} \times \left(\omega-\omega^*\right)\boldsymbol{B}_0^* = \boldsymbol{0}
\end{aligned} \tag{3.183}
$$

$$
\begin{aligned}
&- i\left(\boldsymbol{E}_0^* \cdot \left\{\varepsilon_0 \boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) + i\boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\varepsilon_0 \boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) + i\omega_i \frac{\partial}{\partial \omega}\varepsilon_0 \boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\} \cdot \boldsymbol{E}_0\right)\boldsymbol{k}^* \\
&+ \left[2\boldsymbol{k}_i \cdot \left\{\varepsilon_0 \boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) + i\left(\boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\right)\varepsilon_0 \boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) + i\omega_i \frac{\partial}{\partial \omega}\varepsilon_0 \boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\} \cdot \boldsymbol{E}_0\right]\boldsymbol{E}_0^* \\
&+ i\left(\frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0} \cdot \boldsymbol{B}_0\right)\boldsymbol{k} + \left(2\boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0}\right)\boldsymbol{B}_0 \\
&+ 2\omega_i\left[\left\{\varepsilon_0 \boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) + i\boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial \varepsilon_0 \boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}} + i\omega_i \frac{\partial \varepsilon_0 \boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \omega}\right\} \cdot \boldsymbol{E}_0\right] \times \boldsymbol{B}_0^* = \boldsymbol{0}
\end{aligned} \tag{3.184}
$$

ベクトル公式 $\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}\right) = \boldsymbol{B}\cdot\left(\boldsymbol{C}\otimes\boldsymbol{A}\right)$ を用いて、

$$
\begin{aligned}
&- i\left(\boldsymbol{E}_0^* \cdot \left\{\varepsilon_0 \boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) + i\boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\varepsilon_0 \boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) + i\omega_i \frac{\partial}{\partial \omega}\varepsilon_0 \boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\} \cdot \boldsymbol{E}_0\right)\boldsymbol{k}^* \\
&+ 2\boldsymbol{k}_i \cdot \left(\left[\left\{\varepsilon_0 \boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) + i\left(\boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\right)\varepsilon_0 \boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) + i\omega_i \frac{\partial}{\partial \omega}\varepsilon_0 \boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\} \cdot \boldsymbol{E}_0\right] \otimes \boldsymbol{E}_0^*\right) \\
&+ i\left(\frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0} \cdot \boldsymbol{B}_0\right)\boldsymbol{k} + 2\boldsymbol{k}_i \cdot \left(\frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0} \otimes \boldsymbol{B}_0\right) \\
&+ 2\omega_i\left[\left\{\varepsilon_0 \boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) + i\boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial \varepsilon_0 \boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}} + i\omega_i \frac{\partial \varepsilon_0 \boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \omega}\right\} \cdot \boldsymbol{E}_0\right] \times \boldsymbol{B}_0^* = \boldsymbol{0}
\end{aligned} \tag{3.185}
$$

複素共役との和をとって、

$$
\begin{aligned}
&- i\boldsymbol{k}^*\left(\boldsymbol{E}_0^* \cdot \left\{\varepsilon_0 \boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) + i\boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\varepsilon_0 \boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) + i\omega_i \frac{\partial}{\partial \omega}\varepsilon_0 \boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\} \cdot \boldsymbol{E}_0\right) \\
&+ i\boldsymbol{k}\left(\boldsymbol{E}_0 \cdot \left\{\varepsilon_0 \boldsymbol{K}^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) - i\boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\varepsilon_0 \boldsymbol{K}^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) - i\omega_i \frac{\partial}{\partial \omega}\varepsilon_0 \boldsymbol{K}^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\} \cdot \boldsymbol{E}_0^*\right) \\
&+ 2\boldsymbol{k}_i \cdot \left(\left[\left\{\varepsilon_0 \boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) + i\left(\boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\right)\varepsilon_0 \boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) + i\omega_i \frac{\partial}{\partial \omega}\varepsilon_0 \boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\} \cdot \boldsymbol{E}_0\right] \otimes \boldsymbol{E}_0^*\right) \\
&+ 2\boldsymbol{k}_i \cdot \left(\left[\left\{\varepsilon_0 \boldsymbol{K}^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) - i\left(\boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\right)\varepsilon_0 \boldsymbol{K}^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) - i\omega_i \frac{\partial}{\partial \omega}\varepsilon_0 \boldsymbol{K}^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\} \cdot \boldsymbol{E}_0^*\right] \otimes \boldsymbol{E}_0\right) \\
&+ i\boldsymbol{k}\left(\frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0} \cdot \boldsymbol{B}_0\right) - i\boldsymbol{k}^*\left(\frac{\boldsymbol{B}_0}{\mu_0} \cdot \boldsymbol{B}_0^*\right) + 2\boldsymbol{k}_i \cdot \left(\frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0} \otimes \boldsymbol{B}_0\right) + 2\boldsymbol{k}_i \cdot \left(\frac{\boldsymbol{B}_0}{\mu_0} \otimes \boldsymbol{B}_0^*\right) \\
&+ 2\omega_i\left[\left\{\varepsilon_0 \boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) + i\boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial \varepsilon_0 \boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}} + i\omega_i \frac{\partial \varepsilon_0 \boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \omega}\right\} \cdot \boldsymbol{E}_0\right] \times \boldsymbol{B}_0^* \\
&+ 2\omega_i\left[\left\{\varepsilon_0 \boldsymbol{K}^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) - i\boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial \varepsilon_0 \boldsymbol{K}^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}} - i\omega_i \frac{\partial \varepsilon_0 \boldsymbol{K}^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \omega}\right\} \cdot \boldsymbol{E}_0^*\right] \times \boldsymbol{B}_0 = \boldsymbol{0}
\end{aligned} \tag{3.186}
$$

エルミートテンソルと反エルミートテンソルに分ける。

$$
\begin{aligned}
&-i\boldsymbol{k}^*\left(\boldsymbol{E}_0^*\cdot\left\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right)\\
&+i\boldsymbol{k}\left(\boldsymbol{E}_0\cdot\left\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-i\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-i\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0^*\right)\\
&-i\boldsymbol{k}^*\left(\boldsymbol{E}_0^*\cdot\left\{\varepsilon_0 i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\varepsilon_0 i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\varepsilon_0 i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right)\\
&-i\boldsymbol{k}\left(\boldsymbol{E}_0\cdot\left\{\varepsilon_0 i\boldsymbol{K}_A^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-i\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\varepsilon_0 i\boldsymbol{K}_A^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-i\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\varepsilon_0 i\boldsymbol{K}_A^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0^*\right)\\
&+2\boldsymbol{k}_i\cdot\left(\left[\left\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\left(\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\right)\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right]\otimes\boldsymbol{E}_0^*\right)\\
&+2\boldsymbol{k}_i\cdot\left(\left[\left\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-i\left(\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\right)\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-i\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0^*\right]\otimes\boldsymbol{E}_0\right)\\
&+2\boldsymbol{k}_i\cdot\left(\left[\left\{\varepsilon_0 i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\left(\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\right)\varepsilon_0 i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\varepsilon_0 i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right]\otimes\boldsymbol{E}_0^*\right)\\
&-2\boldsymbol{k}_i\cdot\left(\left[\left\{\varepsilon_0 i\boldsymbol{K}_A^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-i\left(\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\right)\varepsilon_0 i\boldsymbol{K}_A^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-i\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\varepsilon_0 i\boldsymbol{K}_A^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0^*\right]\otimes\boldsymbol{E}_0\right)\\
&+i\boldsymbol{k}\left(\frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0}\cdot\boldsymbol{B}_0\right)-i\boldsymbol{k}^*\left(\frac{\boldsymbol{B}_0}{\mu_0}\cdot\boldsymbol{B}_0^*\right)+2\boldsymbol{k}_i\cdot\left(\frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0}\otimes\boldsymbol{B}_0\right)+2\boldsymbol{k}_i\cdot\left(\frac{\boldsymbol{B}_0}{\mu_0}\otimes\boldsymbol{B}_0^*\right)\\
&+2\omega_i\left[\left\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}+i\omega_i\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right]\times\boldsymbol{B}_0^*\\
&+2\omega_i\left[\left\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-i\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}-i\omega_i\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0^*\right]\times\boldsymbol{B}_0\\
&+2\omega_i\left[\left\{\varepsilon_0 i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial\varepsilon_0 i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}+i\omega_i\frac{\partial\varepsilon_0 i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right]\times\boldsymbol{B}_0^*\\
&-2\omega_i\left[\left\{\varepsilon_0 i\boldsymbol{K}_A^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-i\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial\varepsilon_0 i\boldsymbol{K}_A^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}-i\omega_i\frac{\partial\varepsilon_0 i\boldsymbol{K}_A^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0^*\right]\times\boldsymbol{B}_0=\boldsymbol{0} \qquad (3.187)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&- i\boldsymbol{k}^* \left(\boldsymbol{E}_0^* \cdot \left\{ \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) + i\boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}} \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) + i\omega_i \frac{\partial}{\partial \omega} \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \right\} \cdot \boldsymbol{E}_0 \right) \\
&+ i\boldsymbol{k} \left(\boldsymbol{E}_0^* \cdot \left\{ \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) - i\boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}} \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) - i\omega_i \frac{\partial}{\partial \omega} \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \right\} \cdot \boldsymbol{E}_0 \right) \\
&- i\boldsymbol{k}^* \left(\boldsymbol{E}_0^* \cdot \left\{ \varepsilon_0 i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) + i\boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}} \varepsilon_0 i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) + i\omega_i \frac{\partial}{\partial \omega} \varepsilon_0 i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \right\} \cdot \boldsymbol{E}_0 \right) \\
&- i\boldsymbol{k} \left(\boldsymbol{E}_0^* \cdot \left\{ \varepsilon_0 i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) - i\boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}} \varepsilon_0 i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) - i\omega_i \frac{\partial}{\partial \omega} \varepsilon_0 i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \right\} \cdot \boldsymbol{E}_0 \right) \\
&+ 2\boldsymbol{k}_i \cdot \left(\left[\left\{ \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) + i \left(\boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}} \right) \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) + i\omega_i \frac{\partial}{\partial \omega} \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \right\} \cdot \boldsymbol{E}_0 \right] \otimes \boldsymbol{E}_0^* \right) \\
&+ 2\boldsymbol{k}_i \cdot \left(\left[\left\{ \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) - i \left(\boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}} \right) \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) - i\omega_i \frac{\partial}{\partial \omega} \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \right\} \cdot \boldsymbol{E}_0^* \right] \otimes \boldsymbol{E}_0 \right) \\
&+ 2\boldsymbol{k}_i \cdot \left(\left[\left\{ \varepsilon_0 i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) - \left(\boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}} \right) \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) - \omega_i \frac{\partial}{\partial \omega} \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \right\} \cdot \boldsymbol{E}_0 \right] \otimes \boldsymbol{E}_0^* \right) \\
&+ 2\boldsymbol{k}_i \cdot \left(\left[\left\{ \varepsilon_0 (-i) \boldsymbol{K}_A^*(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) - \left(\boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}} \right) \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_A^*(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) - \omega_i \frac{\partial}{\partial \omega} \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_A^*(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \right\} \cdot \boldsymbol{E}_0^* \right] \otimes \boldsymbol{E}_0 \right) \\
&+ i\boldsymbol{k} \left(\frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0} \cdot \boldsymbol{B}_0 \right) - i\boldsymbol{k}^* \left(\frac{\boldsymbol{B}_0}{\mu_0} \cdot \boldsymbol{B}_0^* \right) + 2\boldsymbol{k}_i \cdot \left(\frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0} \otimes \boldsymbol{B}_0 \right) + 2\boldsymbol{k}_i \cdot \left(\frac{\boldsymbol{B}_0}{\mu_0} \otimes \boldsymbol{B}_0^* \right) \\
&+ 2\omega_i \left[\left\{ \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) + i\boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}} + i\omega_i \frac{\partial \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \omega} \right\} \cdot \boldsymbol{E}_0 \right] \times \boldsymbol{B}_0^* \\
&+ 2\omega_i \left[\left\{ \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) - i\boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}} - i\omega_i \frac{\partial \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \omega} \right\} \cdot \boldsymbol{E}_0^* \right] \times \boldsymbol{B}_0 \\
&+ 2\omega_i \left[\left\{ \varepsilon_0 i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) - \boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}} - \omega_i \frac{\partial \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \omega} \right\} \cdot \boldsymbol{E}_0 \right] \times \boldsymbol{B}_0^* \\
&+ 2\omega_i \left[\left\{ \varepsilon_0 (-i) \boldsymbol{K}_A^*(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) - \boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_A^*(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}} - \omega_i \frac{\partial \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_A^*(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \omega} \right\} \cdot \boldsymbol{E}_0^* \right] \times \boldsymbol{B}_0 = \boldsymbol{0} \qquad (3.188)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+ i \left(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}^* \right) \left(\boldsymbol{E}_0^* \cdot \left\{ \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \right\} \cdot \boldsymbol{E}_0 \right) \\
&+ \left(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}^* \right) \left(\boldsymbol{E}_0^* \cdot \left\{ \boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}} \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) + \omega_i \frac{\partial}{\partial \omega} \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \right\} \cdot \boldsymbol{E}_0 \right) \\
&+ \left(\boldsymbol{k} + \boldsymbol{k}^* \right) \left(\boldsymbol{E}_0^* \cdot \left\{ \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \right\} \cdot \boldsymbol{E}_0 \right) \\
&- i \left(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}^* \right) \left(\boldsymbol{E}_0^* \cdot \left\{ \boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}} \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) + \omega_i \frac{\partial}{\partial \omega} \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \right\} \cdot \boldsymbol{E}_0 \right) \\
&+ 4\boldsymbol{k}_i \cdot \Re \left(\left[\left\{ \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) + i \left(\boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}} \right) \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) + i\omega_i \frac{\partial}{\partial \omega} \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \right\} \cdot \boldsymbol{E}_0 \right] \otimes \boldsymbol{E}_0^* \right) \\
&+ 4\boldsymbol{k}_i \cdot \Re \left(\left[\left\{ \varepsilon_0 i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) - \left(\boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}} \right) \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) - \omega_i \frac{\partial}{\partial \omega} \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \right\} \cdot \boldsymbol{E}_0 \right] \otimes \boldsymbol{E}_0^* \right) \\
&+ i \left(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}^* \right) \left(\frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0} \cdot \boldsymbol{B}_0 \right) + 4\boldsymbol{k}_i \cdot \Re \left(\frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0} \otimes \boldsymbol{B}_0 \right) \\
&+ 4\omega_i \Re \left(\left[\left\{ \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) + i\boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}} + i\omega_i \frac{\partial \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \omega} \right\} \cdot \boldsymbol{E}_0 \right] \times \boldsymbol{B}_0^* \right) \\
&+ 4\omega_i \Re \left(\left[\left\{ \varepsilon_0 i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) - \boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}} - \omega_i \frac{\partial \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \omega} \right\} \cdot \boldsymbol{E}_0 \right] \times \boldsymbol{B}_0^* \right) = \boldsymbol{0} \qquad (3.189)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-2\boldsymbol{k}_i\left(\boldsymbol{E}_0^*\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\right)+2\boldsymbol{k}_r\left(\boldsymbol{E}_0^*\cdot\left\{\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right)\\
&+2\boldsymbol{k}_r\left(\boldsymbol{E}_0^*\cdot\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right)+2\boldsymbol{k}_i\left(\boldsymbol{E}_0^*\cdot\left\{\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right)\\
&+4\boldsymbol{k}_i\cdot\Re\left(\left[\left\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\left(\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\right)\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right]\otimes\boldsymbol{E}_0^*\right)\\
&+4\boldsymbol{k}_i\cdot\Re\left(\left[\left\{\varepsilon_0 i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-\left(\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\right)\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right]\otimes\boldsymbol{E}_0^*\right)\\
&-2\boldsymbol{k}_i\left(\frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0}\cdot\boldsymbol{B}_0\right)+4\boldsymbol{k}_i\cdot\Re\left(\frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0}\otimes\boldsymbol{B}_0\right)\\
&+4\omega_i\Re\left(\left[\left\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}+i\omega_i\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right]\times\boldsymbol{B}_0^*\right)\\
&+4\omega_i\Re\left(\left[\left\{\varepsilon_0 i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}-\omega_i\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right]\times\boldsymbol{B}_0^*\right)=\boldsymbol{0}
\end{aligned}
\tag{3.190}
$$

$$
\begin{aligned}
&-2\boldsymbol{k}_i\left(\boldsymbol{E}_0^*\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\right)+2\boldsymbol{k}_r\left\{\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\boldsymbol{E}_0^*\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}+2\boldsymbol{k}_r\left\{\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{E}_0^*\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}\\
&+2\boldsymbol{k}_r\left(\boldsymbol{E}_0^*\cdot\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right)+2\boldsymbol{k}_i\left\{\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\boldsymbol{E}_0^*\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}+2\boldsymbol{k}_i\left\{\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{E}_0^*\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}\\
&+4\boldsymbol{k}_i\cdot\Re\left(\left[\left\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\left(\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\right)\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right]\otimes\boldsymbol{E}_0^*\right)\\
&+4\boldsymbol{k}_i\cdot\Re\left(\left[\left\{\varepsilon_0 i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-\left(\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\right)\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right]\otimes\boldsymbol{E}_0^*\right)\\
&-2\boldsymbol{k}_i\left(\frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0}\cdot\boldsymbol{B}_0\right)+4\boldsymbol{k}_i\cdot\Re\left(\frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0}\otimes\boldsymbol{B}_0\right)\\
&+4\omega_i\Re\left(\left[\left\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}+i\omega_i\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right]\times\boldsymbol{B}_0^*\right)\\
&+4\omega_i\Re\left(\left[\left\{\varepsilon_0 i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}-\omega_i\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right]\times\boldsymbol{B}_0^*\right)=\boldsymbol{0}
\end{aligned}
\tag{3.191}
$$

ベクトル公式 $\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}\right)=\boldsymbol{B}\cdot\left(\boldsymbol{C}\otimes\boldsymbol{A}\right)$ を用いて、

$$
\begin{aligned}
&-2\boldsymbol{k}_i\left(\boldsymbol{E}_0^*\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\right)+2\boldsymbol{k}_i\cdot\left\{\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\boldsymbol{E}_0^*\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\otimes\boldsymbol{k}_r\right\}+2\omega_i\boldsymbol{k}_r\left\{\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{E}_0^*\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}\\
&+2\boldsymbol{k}_r\left(\boldsymbol{E}_0^*\cdot\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right)+2\boldsymbol{k}_i\cdot\left\{\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\boldsymbol{E}_0^*\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\otimes\boldsymbol{k}_i\right\}+2\omega_i\boldsymbol{k}_i\left\{\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{E}_0^*\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}\\
&+4\boldsymbol{k}_i\cdot\Re\left(\left[\left\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\left(\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\right)\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right]\otimes\boldsymbol{E}_0^*\right)\\
&+4\boldsymbol{k}_i\cdot\Re\left(\left[\left\{\varepsilon_0 i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-\left(\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\right)\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right]\otimes\boldsymbol{E}_0^*\right)\\
&-2\boldsymbol{k}_i\left(\frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0}\cdot\boldsymbol{B}_0\right)+4\boldsymbol{k}_i\cdot\Re\left(\frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0}\otimes\boldsymbol{B}_0\right)\\
&+4\omega_i\Re\left(\left[\left\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}+i\omega_i\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right]\times\boldsymbol{B}_0^*\right)\\
&+4\omega_i\Re\left(\left[\left\{\varepsilon_0 i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}-\omega_i\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right]\times\boldsymbol{B}_0^*\right)=\boldsymbol{0}
\end{aligned}
\tag{3.192}
$$

$$
\begin{aligned}
&-2\boldsymbol{k}_i\left(\boldsymbol{E}_0^*\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\right)+2\boldsymbol{k}_i\cdot\left\{\boldsymbol{k}_r\otimes\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\right\}^T\boldsymbol{E}_0^*\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0+2\omega_i\boldsymbol{k}_r\left\{\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{E}_0^*\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}\\
&+2\boldsymbol{k}_r\left(\boldsymbol{E}_0^*\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\right)+2\boldsymbol{k}_i\cdot\left\{\boldsymbol{k}_i\otimes\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\right\}^T\boldsymbol{E}_0^*\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0+2\omega_i\boldsymbol{k}_i\left\{\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{E}_0^*\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}\\
&+4\boldsymbol{k}_i\cdot\Re\left(\left[\left\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\left(\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\right)\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right]\otimes\boldsymbol{E}_0^*\right)\\
&+4\boldsymbol{k}_i\cdot\Re\left(\left[\left\{\varepsilon_0 i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-\left(\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\right)\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right]\otimes\boldsymbol{E}_0^*\right)\\
&-2\boldsymbol{k}_i\left(\frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0}\cdot\boldsymbol{B}_0\right)+4\boldsymbol{k}_i\cdot\Re\left(\frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0}\otimes\boldsymbol{B}_0\right)\\
&+4\omega_i\Re\left(\left[\left\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}+i\omega_i\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right]\times\boldsymbol{B}_0^*\right)\\
&+4\omega_i\Re\left(\left[\left\{\varepsilon_0 i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}-\omega_i\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right]\times\boldsymbol{B}_0^*\right)=\boldsymbol{0}
\end{aligned}
\tag{3.193}
$$

$$
\begin{aligned}
&-2\boldsymbol{k}_i\cdot\left[\boldsymbol{I}-\left\{\boldsymbol{k}_r\otimes\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\right\}^T\right]\left(\boldsymbol{E}_0^*\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\right)+2\omega_i\boldsymbol{k}_r\left\{\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{E}_0^*\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}\\
&+2\boldsymbol{k}_r\cdot\left(\boldsymbol{E}_0^*\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\right)\boldsymbol{I}+2\boldsymbol{k}_i\cdot\left\{\boldsymbol{k}_i\otimes\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\right\}^T\boldsymbol{E}_0^*\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0+2\omega_i\boldsymbol{k}_i\left\{\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{E}_0^*\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}\\
&+4\boldsymbol{k}_i\cdot\Re\left(\left[\left\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\left(\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\right)\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right]\otimes\boldsymbol{E}_0^*\right)\\
&+4\boldsymbol{k}_i\cdot\Re\left(\left[\left\{\varepsilon_0 i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-\left(\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\right)\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right]\otimes\boldsymbol{E}_0^*\right)\\
&-2\boldsymbol{k}_i\left(\frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0}\cdot\boldsymbol{B}_0\right)+4\boldsymbol{k}_i\cdot\Re\left(\frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0}\otimes\boldsymbol{B}_0\right)\\
&+4\omega_i\Re\left(\left[\left\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}+i\omega_i\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right]\times\boldsymbol{B}_0^*\right)\\
&+4\omega_i\Re\left(\left[\left\{\varepsilon_0 i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}-\omega_i\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right]\times\boldsymbol{B}_0^*\right)=\boldsymbol{0}
\end{aligned}
\tag{3.194}
$$

両辺を 4 で割る。

$$
\begin{aligned}
&-2\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{1}{4}\left[\boldsymbol{I}-\left\{\boldsymbol{k}_r\otimes\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\right\}^T\right]\left(\boldsymbol{E}_0^*\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\right)+2\omega_i\frac{1}{4}\boldsymbol{k}_r\left\{\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{E}_0^*\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\right\}\\
&+2\boldsymbol{k}_r\cdot\frac{1}{4}\left(\boldsymbol{E}_0^*\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\right)\boldsymbol{I}+2\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{1}{4}\left\{\boldsymbol{k}_i\otimes\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\right\}^T\boldsymbol{E}_0^*\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0+2\omega_i\frac{1}{4}\boldsymbol{k}_i\left\{\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{E}_0^*\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}_0\right.\\
&+2\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{1}{2}\Re\left(\left[\left\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\left(\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\right)\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right]\otimes\boldsymbol{E}_0^*\right)\\
&+2\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{1}{2}\Re\left(\left[\left\{\varepsilon_0 i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-\left(\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\right)\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-\omega_i\frac{\partial}{\partial\omega}\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right]\otimes\boldsymbol{E}_0^*\right)\\
&-2\boldsymbol{k}_i\frac{1}{4}\left(\frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0}\cdot\boldsymbol{B}_0\right)+2\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{1}{2}\Re\left(\frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0}\otimes\boldsymbol{B}_0\right)\\
&+2\omega_i\frac{1}{2}\Re\left(\left[\left\{\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}+i\omega_i\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right]\times\boldsymbol{B}_0^*\right)\\
&+2\omega_i\frac{1}{2}\Re\left(\left[\left\{\varepsilon_0 i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}-\omega_i\frac{\partial\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\right\}\cdot\boldsymbol{E}_0\right]\times\boldsymbol{B}_0^*\right)=\boldsymbol{0}
\end{aligned}
\tag{3.195}
$$

したがって、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{G} =& \frac{1}{4}\boldsymbol{k}_r \left\{ \frac{\partial}{\partial \omega} \boldsymbol{E}_0^* \cdot \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \cdot \boldsymbol{E}_0 \right\} + \frac{1}{4}\boldsymbol{k}_i \left\{ \frac{\partial}{\partial \omega} \boldsymbol{E}_0^* \cdot \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \cdot \boldsymbol{E}_0 \right\} \\
&+ \frac{1}{2}\Re\left(\left[\left\{ \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) + i\boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}} + i\omega_i \frac{\partial \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \omega} \right\} \cdot \boldsymbol{E}_0 \right] \times \boldsymbol{B}_0^* \right) \\
&+ \frac{1}{2}\Re\left(\left[\left\{ \varepsilon_0 i \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) - \boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}} - \omega_i \frac{\partial \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \omega} \right\} \cdot \boldsymbol{E}_0 \right] \times \boldsymbol{B}_0^* \right) \\
\boldsymbol{T} =& \frac{1}{4}\left[\boldsymbol{I} - \left\{ \boldsymbol{k}_r \otimes \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}} \right\}^T \right] \left(\boldsymbol{E}_0^* \cdot \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \cdot \boldsymbol{E}_0 \right) - \frac{1}{4}\left\{ \boldsymbol{k}_i \otimes \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}} \right\}^T \boldsymbol{E}_0^* \cdot \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \cdot \boldsymbol{E}_0 \\
&- \frac{1}{2}\Re\left(\left[\left\{ \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) + i\left(\boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}} \right) \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) + i\omega_i \frac{\partial}{\partial \omega} \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \right\} \cdot \boldsymbol{E}_0 \right] \otimes \boldsymbol{E}_0^* \right) \\
&- \frac{1}{2}\Re\left(\left[\left\{ \varepsilon_0 i \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) - \left(\boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}} \right) \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) - \omega_i \frac{\partial}{\partial \omega} \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \right\} \cdot \boldsymbol{E}_0 \right] \otimes \boldsymbol{E}_0^* \right) \\
&+ \frac{1}{4}\left(\frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0} \cdot \boldsymbol{B}_0 \right) \boldsymbol{I} - \frac{1}{2}\Re\left(\frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0} \otimes \boldsymbol{B}_0 \right) \\
\boldsymbol{F} =& \frac{1}{2}\boldsymbol{k}_r \left(\boldsymbol{E}_0^* \cdot \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \cdot \boldsymbol{E}_0 \right)
\end{aligned}
\tag{3.196}
$$

と置いた場合、

$$
2\omega_i \boldsymbol{G} - 2\boldsymbol{k}_i \cdot \boldsymbol{T} + \boldsymbol{F} = \boldsymbol{0} \tag{3.197}
$$

となる。

近似すると、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{G} =& \frac{1}{4}\boldsymbol{k}_r \left\{ \frac{\partial}{\partial \omega} \boldsymbol{E}_0^* \cdot \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \cdot \boldsymbol{E}_0 \right\} + \frac{1}{2}\Re\left(\left[\varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \cdot \boldsymbol{E}_0 \right] \times \boldsymbol{B}_0^* \right) \\
\boldsymbol{T} =& \frac{1}{4}\left[\boldsymbol{I} - \left\{ \boldsymbol{k}_r \otimes \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}} \right\}^T \right] \left(\boldsymbol{E}_0^* \cdot \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \cdot \boldsymbol{E}_0 \right) - \frac{1}{2}\Re\left(\left[\varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \cdot \boldsymbol{E}_0 \right] \otimes \boldsymbol{E}_0^* \right) \\
&+ \frac{1}{4}\left(\frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0} \cdot \boldsymbol{B}_0 \right) \boldsymbol{I} - \frac{1}{2}\Re\left(\frac{\boldsymbol{B}_0^*}{\mu_0} \otimes \boldsymbol{B}_0 \right) \\
\boldsymbol{F} =& \frac{1}{2}\boldsymbol{k}_r \left(\boldsymbol{E}_0^* \cdot \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \cdot \boldsymbol{E}_0 \right)
\end{aligned}
\tag{3.198}
$$

3.3 電流密度ベクトルについて検討

$$
\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}, t)
$$

$$
= \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{k}, \omega) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) \tag{3.199}
$$

$$
\cong \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{k}_r + i\boldsymbol{k}_i, \omega_r + i\omega_i) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) \tag{3.200}
$$

$$
= \left\{ \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}} \cdot i\boldsymbol{k}_i + \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \omega} i\omega_i \right\} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) \tag{3.201}
$$

また、その複素共役は、

$$\{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)\}^* \tag{3.202}$$

$$\cong \left\{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}\cdot i\boldsymbol{k}_i+\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}i\omega_i\right\}^*\cdot\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\}^* \tag{3.203}$$

$$=\left[\{\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\}^*-\left\{\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}\right\}^*\cdot i\boldsymbol{k}_i-\left\{\frac{\partial\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\right\}^* i\omega_i\right]\cdot\{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\}^* \tag{3.204}$$

電流密度ベクトル $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)$ の成分表示、

$$J_k(\boldsymbol{r},t)=\sum_l\sigma_{kl}(\boldsymbol{k},\omega)E_l(\boldsymbol{r},t) \tag{3.205}$$

を参考にして、

$$J_k(\boldsymbol{r},t)\cong\sum_l\left[\sigma_{kl}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+\frac{\partial\sigma_{kl}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}\cdot i\boldsymbol{k}_i+\frac{\partial\sigma_{kl}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}i\omega_i\right]E_l(\boldsymbol{r},t) \tag{3.206}$$

$$\{J_k(\boldsymbol{r},t)\}^*\cong\sum_l\left[\{\sigma_{kl}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\}^*-\left\{\frac{\partial\sigma_{kl}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}\right\}^*\cdot i\boldsymbol{k}_i-\left\{\frac{\partial\sigma_{kl}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}\right\}^* i\omega_i\right]\{E_l(\boldsymbol{r},t)\}^* \tag{3.207}$$

3.4 運動量の時間変化

質量 m_i を持つ荷電粒子 i の運動量は、

$$m_i\boldsymbol{v}_i$$

であるが、その時間変化は運動方程式を用いて、

$$m_i\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_i}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}_i=q_i(\boldsymbol{v}_i\times\boldsymbol{B}_\mathrm{g}+\boldsymbol{E}_\mathrm{g})$$

$\boldsymbol{F}_i$ は荷電粒子 i にはたらく力である。衝突がなければ、電場と磁場による力を受ける。したがって、電流密度 $\boldsymbol{J}_\mathrm{g}$、電荷密度を ρ_g とすると、単位体積当たりの粒子の運動量の変化は、

$$\boldsymbol{J}_\mathrm{g}\times\boldsymbol{B}_\mathrm{g}+\rho_\mathrm{g}\boldsymbol{E}_\mathrm{g}$$

各物理量を、０次成分と波動による１次成分に分ける。ただし、$\boldsymbol{J}_\mathrm{g}$ と $\boldsymbol{E}_\mathrm{g}$ は、０次の成分を持たない。

$$\boldsymbol{J}_1\times(\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{B}_1)+(\rho_0+\rho_1)\,\boldsymbol{E}_1 \tag{3.208}$$

０次成分と１次成分との積は時間平均すると０になる。すなわち、

$$\langle\boldsymbol{J}_\mathrm{g}\times\boldsymbol{B}_\mathrm{g}+\rho_\mathrm{g}\boldsymbol{E}_\mathrm{g}\rangle=\langle\boldsymbol{J}_1\times\boldsymbol{B}_1\rangle+\langle\rho_1\boldsymbol{E}_1\rangle \tag{3.209}$$

電荷密度について考える。電荷保存の式は、

$$\nabla\cdot\boldsymbol{J}_\mathrm{g}+\frac{\partial\rho_\mathrm{g}}{\partial t}=0 \tag{3.210}$$

$$\nabla\cdot\frac{\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)+\boldsymbol{J}^*(\boldsymbol{r},t)}{2}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\rho(\boldsymbol{r},t)+\rho^*(\boldsymbol{r},t)}{2}=0 \tag{3.211}$$

$$i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t)-i\boldsymbol{k}^*\cdot\boldsymbol{J}^*(\boldsymbol{r},t)-i\omega\rho(\boldsymbol{r},t)+i\omega^*\rho^*(\boldsymbol{r},t)=0 \tag{3.212}$$

$$\rho(\boldsymbol{r},t)=\frac{\boldsymbol{k}}{\omega}\cdot\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t) \tag{3.213}$$

$$\rho^*(\boldsymbol{r},t)=\frac{\boldsymbol{k}^*}{\omega^*}\cdot\boldsymbol{J}^*(\boldsymbol{r},t) \tag{3.214}$$

$$
\begin{cases}
\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t) = -i\omega\varepsilon_0 \left(\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega) - \boldsymbol{I}\right) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \\
\boldsymbol{J}^*(\boldsymbol{r},t) = i\omega^*\varepsilon_0 \left(\{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)\}^* - \boldsymbol{I}\right) \cdot \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t) \\
\rho(\boldsymbol{r},t) = -i\boldsymbol{k}\varepsilon_0 \cdot \left(\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega) - \boldsymbol{I}\right) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \\
\rho^*(\boldsymbol{r},t) = i\boldsymbol{k}^*\varepsilon_0 \cdot \left(\{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)\}^* - \boldsymbol{I}\right) \cdot \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)
\end{cases}
\tag{3.215}
$$

したがって、

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t) \times \boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{r},t) + \rho(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t) \\
&= \left[-i\omega\varepsilon_0 \{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega) - \boldsymbol{I}\} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right] \times \boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{r},t) + \left[-i\boldsymbol{k}\varepsilon_0 \cdot \{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega) - \boldsymbol{I}\} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right] \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)
\end{aligned}
\tag{3.216}
$$

マックスウェルの方程式 $-i\boldsymbol{k}^* \times \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t) + i\omega^*\boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{0}$ に、$\varepsilon_0 \{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega) - \boldsymbol{I}\} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ を外積したもの、

$$
-i\left[\varepsilon_0 \{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega) - \boldsymbol{I}\} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right] \times \{\boldsymbol{k}^* \times \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)\} + i\left[\varepsilon_0 \{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega) - \boldsymbol{I}\} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right] \times \{\omega^*\boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{r},t)\} = \boldsymbol{0}
\tag{3.217}
$$

を加える。

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r},t) \times \boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{r},t) + \rho(\boldsymbol{r},t)\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t) \\
&= \left[-i\omega\varepsilon_0 \{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega) - \boldsymbol{I}\} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right] \times \boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{r},t) + \left[-i\boldsymbol{k}\varepsilon_0 \cdot \{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega) - \boldsymbol{I}\} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right] \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t) \\
&\quad - i\left[\varepsilon_0 \{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega) - \boldsymbol{I}\} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right] \times \{\boldsymbol{k}^* \times \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)\} + i\left[\varepsilon_0 \{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega) - \boldsymbol{I}\} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right] \times \{\omega^*\boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{r},t)\}
\end{aligned}
\tag{3.218}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[-i\omega\varepsilon_0 \{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega) - \boldsymbol{I}\} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right] \times \boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{r},t) + i\left[\varepsilon_0 \{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega) - \boldsymbol{I}\} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right] \times \{\omega^*\boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{r},t)\} \\
&\quad + \left[-i\boldsymbol{k}\varepsilon_0 \cdot \{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega) - \boldsymbol{I}\} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right] \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t) - i\left[\varepsilon_0 \{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega) - \boldsymbol{I}\} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right] \times \{\boldsymbol{k}^* \times \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)\}
\end{aligned}
\tag{3.219}
$$

ベクトル公式 $\boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$ を用いて、

$$
\begin{aligned}
&= -i\omega\left[\varepsilon_0 \{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega) - \boldsymbol{I}\} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right] \times \boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{r},t) + i\omega^*\left[\varepsilon_0 \{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega) - \boldsymbol{I}\} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right] \times \boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{r},t) \\
&\quad - i\left[\boldsymbol{k} \cdot \varepsilon_0 \{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega) - \boldsymbol{I}\} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right] \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t) \\
&\quad - i\left(\left[\varepsilon_0 \{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega) - \boldsymbol{I}\} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right] \cdot \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)\right) \boldsymbol{k}^* + i\left(\left[\varepsilon_0 \{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega) - \boldsymbol{I}\} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right] \cdot \boldsymbol{k}^*\right) \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)
\end{aligned}
\tag{3.220}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -i(\omega - \omega^*)\left[\varepsilon_0 \{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega) - \boldsymbol{I}\} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right] \times \boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{r},t) - i\left[(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}^*) \cdot \varepsilon_0 \{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega) - \boldsymbol{I}\} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right] \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t) \\
&\quad - i\left(\left[\varepsilon_0 \{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega) - \boldsymbol{I}\} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right] \cdot \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)\right) \boldsymbol{k}^*
\end{aligned}
\tag{3.221}
$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\omega_i\left[\varepsilon_0 \{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega) - \boldsymbol{I}\} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right] \times \boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{r},t) + \left[2\boldsymbol{k}_i \cdot \varepsilon_0 \{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega) - \boldsymbol{I}\} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right] \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t) \\
&\quad - i\left[\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t) \cdot \varepsilon_0 \{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega) - \boldsymbol{I}\} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right] \boldsymbol{k}^*
\end{aligned}
\tag{3.222}
$$

ベクトル公式 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{B} \cdot (\boldsymbol{C} \otimes \boldsymbol{A})$ を用いて、

$$
\begin{aligned}
&= 2\omega_i\left[\varepsilon_0 \{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega) - \boldsymbol{I}\} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right] \times \boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{r},t) + 2\boldsymbol{k}_i \cdot \left\{\left[\varepsilon_0 \{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega) - \boldsymbol{I}\} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right] \otimes \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)\right\} \\
&\quad - i\left[\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t) \cdot \varepsilon_0 \{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega) - \boldsymbol{I}\} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right] \boldsymbol{k}^*
\end{aligned}
\tag{3.223}
$$

したがって、

$$
\begin{aligned}
&\langle \boldsymbol{J}_{\mathrm{g}} \times \boldsymbol{B}_{\mathrm{g}} + \rho_{\mathrm{g}} \boldsymbol{E}_{\mathrm{g}} \rangle \qquad (3.224)\\
=&\frac{1}{4}\left\{2\omega_i \left[\varepsilon_0 \left\{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)-\boldsymbol{I}\right\}\cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right]\times \boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{r},t) + 2\omega_i \left[\varepsilon_0 \left\{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)-\boldsymbol{I}\right\}^* \cdot \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)\right]\times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)\right.\\
&+2\boldsymbol{k}_i \cdot \left\{\left[\varepsilon_0 \left\{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)-\boldsymbol{I}\right\}\cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right]\otimes \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)\right\} + 2\boldsymbol{k}_i \cdot \left\{\left[\varepsilon_0 \left\{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)-\boldsymbol{I}\right\}^* \cdot \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)\right]\otimes \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right\}\\
&\left.-i\left[\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot \varepsilon_0 \left\{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)-\boldsymbol{I}\right\}\cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right]\boldsymbol{k}^* + i\left[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\cdot \varepsilon_0 \left\{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)-\boldsymbol{I}\right\}^* \cdot \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)\right]\boldsymbol{k}\right\} \qquad (3.225)\\
=&\frac{1}{4}\left\{4\omega_i \Re\left\{\left[\varepsilon_0 \left\{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)-\boldsymbol{I}\right\}\cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right]\times \boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{r},t)\right\} + 4\boldsymbol{k}_i \cdot \Re\left\{\left[\varepsilon_0 \left\{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)-\boldsymbol{I}\right\}\cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right]\otimes \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)\right\}\right.\\
&\left.-i\left[\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot \varepsilon_0 \left\{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)-\boldsymbol{I}\right\}\cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right]\boldsymbol{k}^* + i\left[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\cdot \varepsilon_0 \left\{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)-\boldsymbol{I}\right\}^* \cdot \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)\right]\boldsymbol{k}\right\} \qquad (3.226)\\
=&\omega_i \Re\left\{\left[\varepsilon_0 \left\{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)-\boldsymbol{I}\right\}\cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right]\times \boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{r},t)\right\} + \boldsymbol{k}_i \cdot \Re\left\{\left[\varepsilon_0 \left\{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)-\boldsymbol{I}\right\}\cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right]\otimes \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)\right\}\\
&-\frac{1}{4}i\left[\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot \varepsilon_0 \left\{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)-\boldsymbol{I}\right\}\cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right]\boldsymbol{k}^* + \frac{1}{4}i\left[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\cdot \varepsilon_0 \left\{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)-\boldsymbol{I}\right\}^* \cdot \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)\right]\boldsymbol{k} \qquad (3.227)
\end{aligned}
$$

誘電率テンソルを $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}_r$, $\omega=\omega_r$ の周りに展開し、エルミートテンソルと反エルミートテンソルとに分ける。さらに、(2.38) 式が成り立っているとする。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega) =&\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) + i\boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}} + i\omega_i \frac{\partial \boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \omega} \qquad (3.228)\\
=&\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) + i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) + i\boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}} + i\boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}}\\
&+ i\omega_i \frac{\partial \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \omega} + i\omega_i \frac{\partial i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \omega} \qquad (3.229)\\
=&\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) + i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) + i\boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}} - \boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}}\\
&+ i\omega_i \frac{\partial \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \omega} - \omega_i \frac{\partial \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \omega} \qquad (3.230)\\
\boldsymbol{K}^*(\boldsymbol{k},\omega) =&\boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) - i\boldsymbol{K}_A^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) - i\boldsymbol{k}_i \cdot \left\{\frac{\partial \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}}\right\}^* - \boldsymbol{k}_i \cdot \left\{\frac{\partial \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}}\right\}^*\\
&- i\omega_i \left\{\frac{\partial \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \omega}\right\}^* - \omega_i \left\{\frac{\partial \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \omega}\right\}^* \qquad (3.231)\\
=&\boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) - i\boldsymbol{K}_A^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r) - i\boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}} - \boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{K}_A^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}}\\
&- i\omega_i \frac{\partial \boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \omega} - \omega_i \frac{\partial \boldsymbol{K}_A^*(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \omega} \qquad (3.232)
\end{aligned}
$$

これを代入して、

$$
\begin{aligned}
&\langle \boldsymbol{J}_{\mathrm{g}} \times \boldsymbol{B}_{\mathrm{g}} + \rho_{\mathrm{g}} \boldsymbol{E}_{\mathrm{g}} \rangle \\
=&\omega_i \Re \left\{ \left[\varepsilon_0 \left\{ \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) + i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) + i\boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}} - \boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}} \right.\right.\right. \\
&\left.\left.\left. + i\omega_i \frac{\partial \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \omega} - \omega_i \frac{\partial \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \omega} - \boldsymbol{I} \right\} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) \right] \times \boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{r}, t) \right\} \\
&+ \boldsymbol{k}_i \cdot \Re \left\{ \left[\varepsilon_0 \left\{ \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) + i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) + i\boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}} - \boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}} \right.\right.\right. \\
&\left.\left.\left. + i\omega_i \frac{\partial \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \omega} - \omega_i \frac{\partial \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \omega} - \boldsymbol{I} \right\} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) \right] \otimes \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r}, t) \right\} \\
&- \frac{i}{4} \left\{ \left(\left[\varepsilon_0 \left\{ \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) + i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) + i\boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}} - \boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}} \right.\right.\right.\right. \\
&\left.\left.\left. + i\omega_i \frac{\partial \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \omega} - \omega_i \frac{\partial \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \omega} - \boldsymbol{I} \right\} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) \right] \cdot \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r}, t) \right) \boldsymbol{k}^* \\
&- \left(\left[\varepsilon_0 \left\{ \boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) - i\boldsymbol{K}_A^*(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) - i\boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}} - \boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{K}_A^*(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}} \right.\right.\right. \\
&\left.\left.\left.\left. - i\omega_i \frac{\partial \boldsymbol{K}_H^*(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \omega} - \omega_i \frac{\partial \boldsymbol{K}_A^*(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \omega} - \boldsymbol{I} \right\} \cdot \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r}, t) \right] \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) \right) \boldsymbol{k} \right\}
\end{aligned}
\tag{3.233}
$$

エルミートテンソルの性質を用いて、

$$
\begin{aligned}
=&\omega_i \Re \left\{ \left[\varepsilon_0 \left\{ \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) + i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) + i\boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}} - \boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}} \right.\right.\right. \\
&\left.\left.\left. + i\omega_i \frac{\partial \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \omega} - \omega_i \frac{\partial \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \omega} - \boldsymbol{I} \right\} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) \right] \times \boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{r}, t) \right\} \\
&+ \boldsymbol{k}_i \cdot \Re \left\{ \left[\varepsilon_0 \left\{ \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) + i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) + i\boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}} - \boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}} \right.\right.\right. \\
&\left.\left.\left. + i\omega_i \frac{\partial \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \omega} - \omega_i \frac{\partial \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \omega} - \boldsymbol{I} \right\} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) \right] \otimes \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r}, t) \right\} \\
&- \frac{i}{4} \left\{ \left(\left[\varepsilon_0 \left\{ \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) + i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) + i\boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}} - \boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}} \right.\right.\right.\right. \\
&\left.\left.\left. + i\omega_i \frac{\partial \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \omega} - \omega_i \frac{\partial \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \omega} - \boldsymbol{I} \right\} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) \right] \cdot \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r}, t) \right) \boldsymbol{k}^* \\
&- \left(\left[\varepsilon_0 \left\{ \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) - i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) - i\boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}} - \boldsymbol{k}_i \cdot \frac{\partial \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}} \right.\right.\right. \\
&\left.\left.\left.\left. - i\omega_i \frac{\partial \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \omega} - \omega_i \frac{\partial \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r)}{\partial \omega} - \boldsymbol{I} \right\} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) \right] \cdot \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r}, t) \right) \boldsymbol{k} \right\}
\end{aligned}
\tag{3.234}
$$

$$
\begin{aligned}
=&\omega_i \Re\Bigg\{\Bigg[\varepsilon_0\Bigg\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}}-\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}}\\
&+i\omega_i\frac{\partial \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \omega}-\omega_i\frac{\partial \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \omega}-\boldsymbol{I}\Bigg\}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\Bigg]\times\boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{r},t)\Bigg\}\\
&+\boldsymbol{k}_i\cdot\Re\Bigg\{\Bigg[\varepsilon_0\Bigg\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}}-\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}}\\
&+i\omega_i\frac{\partial \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \omega}-\omega_i\frac{\partial \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \omega}-\boldsymbol{I}\Bigg\}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\Bigg]\otimes\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)\Bigg\}\\
&-\frac{i}{4}\left(\left[\varepsilon_0\left\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}}-\omega_i\frac{\partial \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \omega}-\boldsymbol{I}\right\}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right]\cdot\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)\right)(\boldsymbol{k}^*-\boldsymbol{k})\\
&-\frac{i}{4}\left(\left[\varepsilon_0\left\{i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}}+i\omega_i\frac{\partial \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \omega}\right\}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right]\cdot\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)\right)(\boldsymbol{k}^*+\boldsymbol{k})
\end{aligned}
\tag{3.235}
$$

$$
\begin{aligned}
=&\omega_i \Re\Bigg\{\Bigg[\varepsilon_0\Bigg\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}}-\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}}\\
&+i\omega_i\frac{\partial \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \omega}-\omega_i\frac{\partial \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \omega}-\boldsymbol{I}\Bigg\}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\Bigg]\times\boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{r},t)\Bigg\}\\
&+\boldsymbol{k}_i\cdot\Re\Bigg\{\Bigg[\varepsilon_0\Bigg\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}}-\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \boldsymbol{k}}\\
&+i\omega_i\frac{\partial \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \omega}-\omega_i\frac{\partial \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial \omega}-\boldsymbol{I}\Bigg\}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\Bigg]\otimes\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)\Bigg\}\\
&-\frac{1}{2}\boldsymbol{k}_i\left[\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\varepsilon_0\left\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-\boldsymbol{I}\right\}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right]\\
&+\frac{1}{2}\boldsymbol{k}_i\left[\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right]+\frac{1}{2}\boldsymbol{k}_i\left[\omega_i\frac{\partial}{\partial \omega}\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right]\\
&+\frac{1}{2}\boldsymbol{k}_r\left[\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right]
\end{aligned}
\tag{3.236}
$$

$$
+\frac{1}{2}\boldsymbol{k}_r\left[\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}}\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right]+\frac{1}{2}\boldsymbol{k}_r\left[\omega_i\frac{\partial}{\partial \omega}\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right]
\tag{3.237}
$$

ベクトル公式 $\boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C})=\boldsymbol{B}\cdot(\boldsymbol{C}\otimes\boldsymbol{A})$ を用いて、

$$
\begin{aligned}
=&\omega_i\Re\left\{\left[\varepsilon_0\left\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}-\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}\right.\right.\right.\\
&\left.\left.\left.+i\omega_i\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}-\omega_i\frac{\partial\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}-\boldsymbol{I}\right\}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right]\times\boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{r},t)\right\}\\
&+\boldsymbol{k}_i\cdot\Re\left\{\left[\varepsilon_0\left\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}-\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}\right.\right.\right.\\
&\left.\left.\left.+i\omega_i\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}-\omega_i\frac{\partial\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}-\boldsymbol{I}\right\}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right]\otimes\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)\right\}\\
&-\frac{1}{2}\boldsymbol{k}_i\left[\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\varepsilon_0\left\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-\boldsymbol{I}\right\}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right]\\
&+\frac{1}{2}\boldsymbol{k}_i\cdot\left[\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\otimes\boldsymbol{k}_i\right]+\frac{1}{2}\omega_i\boldsymbol{k}_i\left[\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right]\\
&+\frac{1}{2}\boldsymbol{k}_r\left[\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right]\\
&+\frac{1}{2}\boldsymbol{k}_i\cdot\left[\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\otimes\boldsymbol{k}_r\right]+\frac{1}{2}\omega_i\boldsymbol{k}_r\left[\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right]
\end{aligned}
\tag{3.238}
$$

$$
\begin{aligned}
=&\omega_i\Re\left\{\left[\varepsilon_0\left\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}-\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}\right.\right.\right.\\
&\left.\left.\left.+i\omega_i\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}-\omega_i\frac{\partial\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}-\boldsymbol{I}\right\}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right]\times\boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{r},t)\right\}\\
&+\boldsymbol{k}_i\cdot\Re\left\{\left[\varepsilon_0\left\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)+i\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}-\boldsymbol{k}_i\cdot\frac{\partial\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\boldsymbol{k}}\right.\right.\right.\\
&\left.\left.\left.+i\omega_i\frac{\partial\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}-\omega_i\frac{\partial\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)}{\partial\omega}-\boldsymbol{I}\right\}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right]\otimes\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)\right\}\\
&-\frac{1}{2}\boldsymbol{k}_i\cdot\left[\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\varepsilon_0\left\{\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)-\boldsymbol{I}\right\}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right]\boldsymbol{I}\\
&+\frac{1}{2}\boldsymbol{k}_i\cdot\left[\boldsymbol{k}_i\otimes\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\right]^T\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\frac{1}{2}\omega_i\boldsymbol{k}_i\left[\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right]\\
&+\frac{1}{2}\boldsymbol{k}_r\left[\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right]\\
&+\frac{1}{2}\boldsymbol{k}_i\cdot\left[\boldsymbol{k}_r\otimes\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{k}}\right]^T\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+\frac{1}{2}\omega_i\boldsymbol{k}_r\left[\frac{\partial}{\partial\omega}\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r},t)\cdot\varepsilon_0\boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r,\omega_r)\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\right]
\end{aligned}
\tag{3.239}
$$

近似すると、

$$
\begin{aligned}
&\langle \boldsymbol{J}_\mathrm{g} \times \boldsymbol{B}_\mathrm{g} + \rho_\mathrm{g} \boldsymbol{E}_\mathrm{g} \rangle \\
=&\omega_i \left[\Re \left\{ \left[\varepsilon_0 \left\{ \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) - \boldsymbol{I} \right\} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) \right] \times \boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{r}, t) \right\} + \frac{1}{2} \boldsymbol{k}_r \left[\frac{\partial}{\partial \omega} \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r}, t) \cdot \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) \right] \right] \\
&+ 2\boldsymbol{k}_i \cdot \left[\frac{1}{2} \Re \left\{ \left[\varepsilon_0 \left\{ \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) - \boldsymbol{I} \right\} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) \right] \otimes \boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r}, t) \right\} \right. \\
&\left. - \frac{1}{4} \left\{ \boldsymbol{I} - \left(\boldsymbol{k}_r \otimes \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{k}} \right)^T \right\} \left[\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r}, t) \cdot \varepsilon_0 \left\{ \boldsymbol{K}_H(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) - \boldsymbol{I} \right\} \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) \right] \right] \\
&+ \frac{1}{2} \boldsymbol{k}_r \left[\boldsymbol{E}^*(\boldsymbol{r}, t) \cdot \varepsilon_0 \boldsymbol{K}_A(\boldsymbol{k}_r, \omega_r) \cdot \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t) \right]
\end{aligned}
\tag{3.240}
$$

第4章　冷たいプラズマの波動

4.1　分散式の導出

ここで、(1.12) 式における電流密度ベクトル $\boldsymbol{J}_s$ の時間微分 $\partial\boldsymbol{J}_s/\partial t$ を $\boldsymbol{E}$ で表すことを考える。荷電粒子 s の質量を m_s、電荷を q_s、速度ベクトルを $\boldsymbol{v}_s$ とすると、

$$\boldsymbol{J}_s = q_s \sum_V \boldsymbol{v}_s \tag{4.1}$$

である。ここで、$\sum_V$ は、単位体積あたりに含まれる荷電粒子 s の和を取ることを表している。

ここでは、冷たいプラズマ、すなわち、荷電粒子が熱運動していない状態を扱っている。この場合、全荷電粒子揃って同一の運動をしている。そのため、

$$\sum_V \boldsymbol{v}_s = \boldsymbol{v}_s \sum_V 1 = \boldsymbol{v}_s n_s \tag{4.2}$$

の関係が成り立つ。n_s は、荷電粒子 s の体積密度（単位体積あたり荷電粒子 s の個数）のである。したがって、

$$\boldsymbol{J}_s = q_s n_s \boldsymbol{v}_s \tag{4.3}$$

が成り立つ。時間で偏微分して、

$$\frac{\partial \boldsymbol{J}_s}{\partial t} = \frac{\partial (q_s n_s \boldsymbol{v}_s)}{\partial t} \tag{4.4}$$

。ここで、n_s、$\boldsymbol{v}_s$ を、時間一定の 0 次の成分 n_{s0}、$\boldsymbol{v}_{s0}$ と、波動により微小振動する 1 次の成分 $\Re(n_{s1})$、$\Re(\boldsymbol{v}_{s1})$ に分ける。

$$n_s = n_{s0} + \Re(n_{s1}) \tag{4.5}$$

$$\boldsymbol{v}_s = \boldsymbol{v}_{s0} + \Re(\boldsymbol{v}_{s1}) \tag{4.6}$$

冷たいプラズマを考えているから $\boldsymbol{v}_{s0} = \boldsymbol{0}$ であることに注意すると、

$$\frac{\partial \boldsymbol{J}_s}{\partial t} = q_s \frac{\partial (n_{s0}\Re(\boldsymbol{v}_{s1}) + \Re(n_{s1})\Re(\boldsymbol{v}_{s1}))}{\partial t} \tag{4.7}$$

ここでは、微小振動を考えているため、$|n_{s0}| >> |n_{s1}|$ である。したがって、

$$\frac{\partial \boldsymbol{J}_s}{\partial t} = q_s \frac{\partial n_{s0}\Re(\boldsymbol{v}_{s1})}{\partial t} = q_s n_{s0} \frac{d\Re(\boldsymbol{v}_{s1})}{dt} \tag{4.8}$$

と近似できる。したがって、

一方、質量 m_s、電荷 q_s の荷電粒子 s の運動方程式は、

$$m_s \frac{\mathrm{d}\Re(\boldsymbol{v}_{s1})}{\mathrm{d}t} = q_s(\Re(\boldsymbol{E}) + \Re(\boldsymbol{v}_{s1}) \times \boldsymbol{B}) \tag{4.9}$$

である。ここで、$\boldsymbol{B}$ は外部磁場 $\boldsymbol{B}_0$ と、波動磁場 $\Re(\boldsymbol{B}_1)$ との和である。

$$m_s\frac{\mathrm{d}\Re(\boldsymbol{v}_{s1})}{\mathrm{d}t} = q_s\left\{\Re(\boldsymbol{E}) + \Re(\boldsymbol{v}_{s1})\times\boldsymbol{B}_0 + \Re(\boldsymbol{v}_{s1})\times\Re(\boldsymbol{B}_1)\right\} \tag{4.10}$$

右辺括弧内第 3 項は、他の 2 項に比べ非常に小さいので無視する。さらに、外部磁場 $\boldsymbol{B}_0$ が Y 成分を持たないとし、Z 軸と θ の角をなしているとする。

$$\boldsymbol{B}_0 = \begin{pmatrix} B_0\sin\theta \\ 0 \\ B_0\cos\theta \end{pmatrix} \tag{4.11}$$

したがって、右辺の $\Re(\boldsymbol{v}_{s1})\times\boldsymbol{B}_0$ は、

$$\Re(\boldsymbol{v}_{s1})\times\boldsymbol{B}_0 = \begin{pmatrix} \Re(v_{sY})B_0\cos\theta \\ \Re(v_{sZ})B_0\sin\theta - \Re(v_{sX})B_0\cos\theta \\ -\Re(v_{sY})B_0\sin\theta \end{pmatrix} \tag{4.12}$$

である。

速度ベクトル $\boldsymbol{v}_{s1}$ は、角周波数 ω で振動しているとして、以下のとおり表示できるとする。

$$\Re(\boldsymbol{v}_{s1}) = \begin{pmatrix} \Re(v_{s1X}) \\ \Re(v_{s1Y}) \\ \Re(v_{s1Z}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Re\left(v_{s1X0}\mathrm{exp}(-i\omega t)\right) \\ \Re\left(v_{s1Y0}\mathrm{exp}(-i\omega t)\right) \\ \Re\left(v_{s1Z0}\mathrm{exp}(-i\omega t)\right) \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

したがって、(4.9) 式は、

$$m_s\frac{\mathrm{d}(\boldsymbol{v}_{s1}+\boldsymbol{v}_{s1}{}^*)}{\mathrm{d}t} = q_s\{(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}^*) + (\boldsymbol{v}_{s1}+\boldsymbol{v}_{s1}{}^*)\times\boldsymbol{B}\} \tag{4.14}$$

$$m_s(-i\omega\boldsymbol{v}_{s1} + i\omega^*\boldsymbol{v}_{s1}{}^*) = q_s\{(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{E}^*) + (\boldsymbol{v}_{s1}+\boldsymbol{v}_{s1}{}^*)\times\boldsymbol{B}\} \tag{4.15}$$

ここで、

$$m_s(-i\omega\boldsymbol{v}_{s1}) = q_s\{\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v}_{s1}\times\boldsymbol{B}\} \tag{4.16}$$

を解けばよい。この先、X、Y、Z の成分ごとに解く。

$$\begin{pmatrix} -im_s\omega v_{s1X} \\ -im_s\omega v_{s1Y} \\ -im_s\omega v_{s1Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_s(E_X + v_{s1Y}B_0\cos\theta) \\ q_s(E_Y + v_{s1Z}B_0\sin\theta - v_{s1X}B_0\cos\theta) \\ q_s(E_Z - v_{s1Y}B_0\sin\theta) \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

v_{s1X}、v_{s1Y}、v_{s1Z} について解くと（4.7 節参照）、

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} v_{s1X} \\ v_{s1Y} \\ v_{s1Z} \end{pmatrix} &= \frac{q_s}{m_s\omega(\omega^2-\omega_{cs}{}^2)}\begin{pmatrix} i(\omega^2-\omega_{cs}{}^2\sin^2\theta)E_X - \omega\omega_{cs}E_Y\cos\theta - i\omega_{cs}{}^2E_Z\sin\theta\cos\theta \\ i\omega^2E_Y - \omega\omega_{cs}E_Z\sin\theta + \omega\omega_{cs}E_X\cos\theta \\ i(\omega^2-\omega_{cs}{}^2\cos^2\theta)E_Z + \omega\omega_{cs}E_Y\sin\theta - i\omega_{cs}{}^2E_X\cos\theta\sin\theta \end{pmatrix} \\
&= \frac{\epsilon_0\omega}{q_sn_{s0}}\begin{pmatrix} i\frac{\omega_{ps}{}^2(\omega^2-\omega_{cs}{}^2\sin^2\theta)}{\omega^2(\omega^2-\omega_{cs}{}^2)} & -\frac{\omega_{ps}{}^2\omega\omega_{cs}\cos\theta}{\omega^2(\omega^2-\omega_{cs}{}^2)} & -i\frac{\omega_{ps}{}^2\omega_{cs}{}^2\sin\theta\cos\theta}{\omega^2(\omega^2-\omega_{cs}{}^2)} \\ \frac{\omega_{ps}{}^2\omega\omega_{cs}\cos\theta}{\omega^2(\omega^2-\omega_{cs}{}^2)} & i\frac{\omega_{ps}{}^2\omega^2}{\omega^2(\omega^2-\omega_{cs}{}^2)} & -\frac{\omega_{ps}{}^2\omega\omega_{cs}\sin\theta}{\omega^2(\omega^2-\omega_{cs}{}^2)} \\ -i\frac{\omega_{ps}{}^2\omega_{cs}{}^2\cos\theta\sin\theta}{\omega^2(\omega^2-\omega_{cs}{}^2)} & \frac{\omega_{ps}{}^2\omega\omega_{cs}\sin\theta}{\omega^2(\omega^2-\omega_{cs}{}^2)} & i\frac{\omega_{ps}{}^2(\omega^2-\omega_{cs}{}^2\cos^2\theta)}{\omega^2(\omega^2-\omega_{cs}{}^2)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

が得られる。ただし、

$$\omega_{ps}{}^2 = \frac{q_s{}^2 n_{s0}}{\varepsilon_0 m_s} \tag{4.18}$$

であり、ω_{ps} は、荷電粒子 s のプラズマ角周波数である。

また、移動度テンソル $\boldsymbol{\mu}_{1\mathrm{s}}(\omega)$ は、

$$\boldsymbol{\mu}_{1\mathrm{s}}(\omega) = \frac{\varepsilon_0\omega}{q_s n_{s0}} \begin{pmatrix} i\frac{\omega_{ps}{}^2(\omega^2-\omega_{cs}{}^2\sin^2\theta)}{\omega^2(\omega^2-\omega_{cs}{}^2)} & -\frac{\omega_{ps}{}^2\omega\omega_{cs}\cos\theta}{\omega^2(\omega^2-\omega_{cs}{}^2)} & -i\frac{\omega_{ps}{}^2\omega_{cs}{}^2\sin\theta\cos\theta}{\omega^2(\omega^2-\omega_{cs}{}^2)} \\ \frac{\omega_{ps}{}^2\omega\omega_{cs}\cos\theta}{\omega^2(\omega^2-\omega_{cs}{}^2)} & i\frac{\omega_{ps}{}^2\omega^2}{\omega^2(\omega^2-\omega_{cs}{}^2)} & -\frac{\omega_{ps}{}^2\omega\omega_{cs}\sin\theta}{\omega^2(\omega^2-\omega_{cs}{}^2)} \\ -i\frac{\omega_{ps}{}^2\omega_{cs}{}^2\cos\theta\sin\theta}{\omega^2(\omega^2-\omega_{cs}{}^2)} & \frac{\omega_{ps}{}^2\omega\omega_{cs}\sin\theta}{\omega^2(\omega^2-\omega_{cs}{}^2)} & i\frac{\omega_{ps}{}^2(\omega^2-\omega_{cs}{}^2\cos^2\theta)}{\omega^2(\omega^2-\omega_{cs}{}^2)} \end{pmatrix} \tag{4.19}$$

複素共役の方程式については、

$$m_s(+i\omega^*\boldsymbol{v}_{s1}{}^*) = q_s\{\boldsymbol{E}^* + \boldsymbol{v}_{s1}{}^* \times \boldsymbol{B}\} \tag{4.20}$$

を解けばよい。この先、X、Y、Z の成分ごとに解く。

$$\begin{pmatrix} im_s\omega^* v_{s1X}{}^* \\ im_s\omega^* v_{s1Y}{}^* \\ im_s\omega^* v_{s1Z}{}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_s(E_X{}^* + v_{s1Y}{}^* B_0\cos\theta) \\ q_s(E_Y{}^* + v_{s1Z}{}^* B_0\sin\theta - v_{s1X}{}^* B_0\cos\theta) \\ q_s(E_Z{}^* - v_{s1Y}{}^* B_0\sin\theta) \end{pmatrix} \tag{4.21}$$

$v_{s1X}{}^*$、$v_{s1Y}{}^*$、$v_{s1Z}{}^*$ について解くと、詳しくは 4.7 節参照。

$$\begin{pmatrix} v_{s1X}{}^* \\ v_{s1Y}{}^* \\ v_{s1Z}{}^* \end{pmatrix} = \frac{q_s}{m_s\omega^*(\omega^{*2}-\omega_{cs}{}^2)} \begin{pmatrix} -i(\omega^{*2}-\omega_{cs}{}^2\sin^2\theta)E_X{}^* - \omega^*\omega_{cs}E_Y{}^*\cos\theta + i\omega_{cs}{}^2E_Z{}^*\sin\theta\cos\theta \\ -i\omega^{*2}E_Y{}^* - \omega^*\omega_{cs}E_Z{}^*\sin\theta + \omega^*\omega_{cs}E_X{}^*\cos\theta \\ -i(\omega^{*2}-\omega_{cs}{}^2\cos^2\theta)E_Z{}^* + \omega^*\omega_{cs}E_Y{}^*\sin\theta + i\omega_{cs}{}^2E_X{}^*\cos\theta\sin\theta \end{pmatrix} \tag{4.22}$$

$$= \frac{\varepsilon_0\omega^*}{q_s n_{s0}} \begin{pmatrix} -i\frac{\omega_{ps}{}^2(\omega^{*2}-\omega_{cs}{}^2\sin^2\theta)}{\omega^{*2}(\omega^{*2}-\omega_{cs}{}^2)} & -\frac{\omega_{ps}{}^2\omega^*\omega_{cs}\cos\theta}{\omega^{*2}(\omega^{*2}-\omega_{cs}{}^2)} & i\frac{\omega_{ps}{}^2\omega_{cs}{}^2\sin\theta\cos\theta}{\omega^{*2}(\omega^{*2}-\omega_{cs}{}^2)} \\ \frac{\omega_{ps}{}^2\omega^*\omega_{cs}\cos\theta}{\omega^{*2}(\omega^{*2}-\omega_{cs}{}^2)} & -i\frac{\omega_{ps}{}^2\omega^{*2}}{\omega^{*2}(\omega^{*2}-\omega_{cs}{}^2)} & -\frac{\omega_{ps}{}^2\omega^*\omega_{cs}\sin\theta}{\omega^{*2}(\omega^{*2}-\omega_{cs}{}^2)} \\ i\frac{\omega_{ps}{}^2\omega_{cs}{}^2\cos\theta\sin\theta}{\omega^{*2}(\omega^{*2}-\omega_{cs}{}^2)} & \frac{\omega_{ps}{}^2\omega^*\omega_{cs}\sin\theta}{\omega^{*2}(\omega^{*2}-\omega_{cs}{}^2)} & -i\frac{\omega_{ps}{}^2(\omega^{*2}-\omega_{cs}{}^2\cos^2\theta)}{\omega^{*2}(\omega^{*2}-\omega_{cs}{}^2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_X{}^* \\ E_Y{}^* \\ E_Z{}^* \end{pmatrix} \tag{4.23}$$

が得られる。したがって、移動度テンソル $\boldsymbol{\mu}_{2\mathrm{s}}$ は、

$$\boldsymbol{\mu}_{2\mathrm{s}}(\omega) = \frac{\varepsilon_0\omega^*}{q_s n_{s0}} \begin{pmatrix} -i\frac{\omega_{ps}{}^2(\omega^{*2}-\omega_{cs}{}^2\sin^2\theta)}{\omega^{*2}(\omega^{*2}-\omega_{cs}{}^2)} & -\frac{\omega_{ps}{}^2\omega^*\omega_{cs}\cos\theta}{\omega^{*2}(\omega^{*2}-\omega_{cs}{}^2)} & i\frac{\omega_{ps}{}^2\omega_{cs}{}^2\sin\theta\cos\theta}{\omega^{*2}(\omega^{*2}-\omega_{cs}{}^2)} \\ \frac{\omega_{ps}{}^2\omega^*\omega_{cs}\cos\theta}{\omega^{*2}(\omega^{*2}-\omega_{cs}{}^2)} & -i\frac{\omega_{ps}{}^2\omega^{*2}}{\omega^{*2}(\omega^{*2}-\omega_{cs}{}^2)} & -\frac{\omega_{ps}{}^2\omega^*\omega_{cs}\sin\theta}{\omega^{*2}(\omega^{*2}-\omega_{cs}{}^2)} \\ i\frac{\omega_{ps}{}^2\omega_{cs}{}^2\cos\theta\sin\theta}{\omega^{*2}(\omega^{*2}-\omega_{cs}{}^2)} & \frac{\omega_{ps}{}^2\omega^*\omega_{cs}\sin\theta}{\omega^{*2}(\omega^{*2}-\omega_{cs}{}^2)} & -i\frac{\omega_{ps}{}^2(\omega^{*2}-\omega_{cs}{}^2\cos^2\theta)}{\omega^{*2}(\omega^{*2}-\omega_{cs}{}^2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_X{}^* \\ E_Y{}^* \\ E_Z{}^* \end{pmatrix} \tag{4.24}$$

したがって、$\boldsymbol{\mu}_{1\mathrm{s}}(\omega)$ と $\boldsymbol{\mu}_{2\mathrm{s}}(\omega)$ は複素共役の関係にある。

そこで、

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{s}}(\omega) = \frac{\varepsilon_0\omega}{q_s n_{s0}} \begin{pmatrix} i\frac{\omega_{ps}{}^2(\omega^2-\omega_{cs}{}^2\sin^2\theta)}{\omega^2(\omega^2-\omega_{cs}{}^2)} & -\frac{\omega_{ps}{}^2\omega\omega_{cs}\cos\theta}{\omega^2(\omega^2-\omega_{cs}{}^2)} & -i\frac{\omega_{ps}{}^2\omega_{cs}{}^2\sin\theta\cos\theta}{\omega^2(\omega^2-\omega_{cs}{}^2)} \\ \frac{\omega_{ps}{}^2\omega\omega_{cs}\cos\theta}{\omega^2(\omega^2-\omega_{cs}{}^2)} & i\frac{\omega_{ps}{}^2\omega^2}{\omega^2(\omega^2-\omega_{cs}{}^2)} & -\frac{\omega_{ps}{}^2\omega\omega_{cs}\sin\theta}{\omega^2(\omega^2-\omega_{cs}{}^2)} \\ -i\frac{\omega_{ps}{}^2\omega_{cs}{}^2\cos\theta\sin\theta}{\omega^2(\omega^2-\omega_{cs}{}^2)} & \frac{\omega_{ps}{}^2\omega\omega_{cs}\sin\theta}{\omega^2(\omega^2-\omega_{cs}{}^2)} & i\frac{\omega_{ps}{}^2(\omega^2-\omega_{cs}{}^2\cos^2\theta)}{\omega^2(\omega^2-\omega_{cs}{}^2)} \end{pmatrix} \tag{4.25}$$

と $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{s}}(\omega)$ を定義すると、

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{s}}(\omega)\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \tag{4.26}$$

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},t)^* = \boldsymbol{\mu}_{\mathrm{s}}(\omega)^*\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)^* \tag{4.27}$$

の関係がある。また、時刻 t において、位置 $\boldsymbol{r}$ に存在する粒子の速度である。

したがって、時刻 t において、位置 $\boldsymbol{r}$ に存在する荷電粒子による電流密度ベクトル $\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},t)$ は、

$$\boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},t) \tag{4.28}$$

$$= q_s n_{\mathrm{s}0}\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}} \tag{4.29}$$

$$= \varepsilon_0\omega\begin{pmatrix} i\dfrac{{\omega_{ps}}^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2\sin^2\theta)}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)} & -\dfrac{{\omega_{ps}}^2\omega\omega_{cs}\cos\theta}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)} & -i\dfrac{{\omega_{ps}}^2{\omega_{cs}}^2\sin\theta\cos\theta}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)} \\ \dfrac{{\omega_{ps}}^2\omega\omega_{cs}\cos\theta}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)} & i\dfrac{{\omega_{ps}}^2\omega^2}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)} & -\dfrac{{\omega_{ps}}^2\omega\omega_{cs}\sin\theta}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)} \\ -i\dfrac{{\omega_{ps}}^2{\omega_{cs}}^2\cos\theta\sin\theta}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)} & \dfrac{{\omega_{ps}}^2\omega\omega_{cs}\sin\theta}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)} & i\dfrac{{\omega_{ps}}^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2\cos^2\theta)}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix} \tag{4.30}$$

同様に、

$$\boldsymbol{J}_s(\boldsymbol{r},t)^* = q_s n_{s0}\boldsymbol{v}_s^* \tag{4.31}$$

$$= \epsilon_0\omega^*\begin{pmatrix} -i\frac{{\omega_{ps}}^2({\omega^*}^2-{\omega_{cs}}^2\sin^2\theta)}{{\omega^*}^2({\omega^*}^2-{\omega_{cs}}^2)} & -\frac{{\omega_{ps}}^2\omega^*\omega_{cs}\cos\theta}{{\omega^*}^2({\omega^*}^2-{\omega_{cs}}^2)} & i\frac{{\omega_{ps}}^2{\omega_{cs}}^2\sin\theta\cos\theta}{{\omega^*}^2({\omega^*}^2-{\omega_{cs}}^2)} \\ \frac{{\omega_{ps}}^2\omega^*\omega_{cs}\cos\theta}{{\omega^*}^2({\omega^*}^2-{\omega_{cs}}^2)} & -i\frac{{\omega_{ps}}^2{\omega^*}^2}{{\omega^*}^2({\omega^*}^2-{\omega_{cs}}^2)} & -\frac{{\omega_{ps}}^2\omega^*\omega_{cs}\sin\theta}{{\omega^*}^2({\omega^*}^2-{\omega_{cs}}^2)} \\ i\frac{{\omega_{ps}}^2{\omega_{cs}}^2\cos\theta\sin\theta}{{\omega^*}^2({\omega^*}^2-{\omega_{cs}}^2)} & \frac{{\omega_{ps}}^2\omega^*\omega_{cs}\sin\theta}{{\omega^*}^2({\omega^*}^2-{\omega_{cs}}^2)} & -i\frac{{\omega_{ps}}^2({\omega^*}^2-{\omega_{cs}}^2\cos^2\theta)}{{\omega^*}^2({\omega^*}^2-{\omega_{cs}}^2)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} {E_X}^* \\ {E_Y}^* \\ {E_Z}^* \end{pmatrix} \tag{4.32}$$

したがって、

$$\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{s}}$$

$$= \varepsilon_0\omega\begin{pmatrix} i\dfrac{{\omega_{ps}}^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2\sin^2\theta)}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)} & -\dfrac{{\omega_{ps}}^2\omega\omega_{cs}\cos\theta}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)} & -i\dfrac{{\omega_{ps}}^2{\omega_{cs}}^2\sin\theta\cos\theta}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)} \\ \dfrac{{\omega_{ps}}^2\omega\omega_{cs}\cos\theta}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)} & i\dfrac{{\omega_{ps}}^2\omega^2}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)} & -\dfrac{{\omega_{ps}}^2\omega\omega_{cs}\sin\theta}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)} \\ -i\dfrac{{\omega_{ps}}^2{\omega_{cs}}^2\cos\theta\sin\theta}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)} & \dfrac{{\omega_{ps}}^2\omega\omega_{cs}\sin\theta}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)} & i\dfrac{{\omega_{ps}}^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2\cos^2\theta)}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)} \end{pmatrix} \tag{4.33}$$

$$= \varepsilon_0\omega\begin{pmatrix} i\dfrac{{\omega_{ps}}^2(\omega^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)-{\omega_{cs}}^2\sin^2\theta)}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)} & -\dfrac{{\omega_{ps}}^2\omega_{cs}\cos\theta}{\omega(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)} & -i\dfrac{{\omega_{ps}}^2{\omega_{cs}}^2\sin\theta\cos\theta}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)} \\ \dfrac{{\omega_{ps}}^2\omega_{cs}\cos\theta}{\omega(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)} & i\dfrac{{\omega_{ps}}^2}{(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)} & -\dfrac{{\omega_{ps}}^2\omega_{cs}\sin\theta}{\omega(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)} \\ -i\dfrac{{\omega_{ps}}^2{\omega_{cs}}^2\cos\theta\sin\theta}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)} & \dfrac{{\omega_{ps}}^2\omega_{cs}\sin\theta}{\omega(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)} & i\dfrac{{\omega_{ps}}^2(\omega^2(\sin^2\theta+\cos^2\theta)-{\omega_{cs}}^2\cos^2\theta)}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)} \end{pmatrix} \tag{4.34}$$

$$= \varepsilon_0\omega\begin{pmatrix} i\dfrac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2}{\omega^2}\sin^2\theta + i\dfrac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2}{\omega^2-{\omega_{\mathrm{cs}}}^2}\cos^2\theta & -\dfrac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2\omega_{\mathrm{cs}}}{\omega(\omega^2-{\omega_{\mathrm{cs}}}^2)}\cos\theta & -i\dfrac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2{\omega_{\mathrm{cs}}}^2}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{\mathrm{cs}}}^2)}\sin\theta\cos\theta \\ \dfrac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2\omega_{\mathrm{cs}}}{\omega(\omega^2-{\omega_{\mathrm{cs}}}^2)}\cos\theta & i\dfrac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2}{\omega^2-{\omega_{\mathrm{cs}}}^2} & -\dfrac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2\omega_{\mathrm{cs}}}{\omega(\omega^2-{\omega_{\mathrm{cs}}}^2)}\sin\theta \\ -i\dfrac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2{\omega_{\mathrm{cs}}}^2}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{\mathrm{cs}}}^2)}\cos\theta\sin\theta & \dfrac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2\omega_{\mathrm{cs}}}{\omega(\omega^2-{\omega_{\mathrm{cs}}}^2)}\sin\theta & i\dfrac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2}{\omega^2}\cos^2\theta + i\dfrac{{\omega_{ps}}^2}{\omega^2-{\omega_{cs}}^2}\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{4.35}$$

と導電率テンソル $\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{s}}(\omega)$ を定義すると、

$$\begin{cases} \boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{s}}(\omega)\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \\ \boldsymbol{J}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},t)^* = \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{s}}(\omega)^*\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)^* \end{cases} \tag{4.36}$$

なお、

$$\begin{cases} S_{\mathrm{s}} = -\dfrac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2}{\omega^2-{\omega_{\mathrm{cs}}}^2} \\ D_{\mathrm{s}} = \dfrac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2\omega_{\mathrm{cs}}}{\omega(\omega^2-{\omega_{\mathrm{cs}}}^2)} \\ P_{\mathrm{s}} = -\dfrac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2}{\omega^2} \\ P_{\mathrm{s}}-S_{\mathrm{s}} = \dfrac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2{\omega_{\mathrm{cs}}}^2}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{\mathrm{cs}}}^2)} \end{cases} \tag{4.37}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{s}} \\ =&\varepsilon_0\omega\begin{pmatrix} i\dfrac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2}{\omega^2}\sin^2\theta+i\dfrac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2}{\omega^2-{\omega_{\mathrm{cs}}}^2}\cos^2\theta & -\dfrac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2\omega_{\mathrm{cs}}}{\omega(\omega^2-{\omega_{\mathrm{cs}}}^2)}\cos\theta & -i\dfrac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2{\omega_{\mathrm{cs}}}^2}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{\mathrm{cs}}}^2)}\sin\theta\cos\theta \\ \dfrac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2\omega_{\mathrm{cs}}}{\omega(\omega^2-{\omega_{\mathrm{cs}}}^2)}\cos\theta & i\dfrac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2}{\omega^2-{\omega_{\mathrm{cs}}}^2} & -\dfrac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2\omega_{\mathrm{cs}}}{\omega(\omega^2-{\omega_{\mathrm{cs}}}^2)}\sin\theta \\ -i\dfrac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2{\omega_{\mathrm{cs}}}^2}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{\mathrm{cs}}}^2)}\cos\theta\sin\theta & \dfrac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2\omega_{\mathrm{cs}}}{\omega(\omega^2-{\omega_{\mathrm{cs}}}^2)}\sin\theta & i\dfrac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2}{\omega^2}\cos^2\theta+i\dfrac{{\omega_{ps}}^2}{\omega^2-{\omega_{cs}}^2}\sin^2\theta \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.38}$$

$$=\varepsilon_0\omega\begin{pmatrix} i(-P_{\mathrm{s}})\sin^2\theta+i(-S_{\mathrm{s}})\cos^2\theta & -D_{\mathrm{s}}\cos\theta & -i(P_{\mathrm{s}}-S_{\mathrm{s}})\sin\theta\cos\theta \\ D_{\mathrm{s}}\cos\theta & i(-S_{\mathrm{s}}) & -D_{\mathrm{s}}\sin\theta \\ -i(P_{\mathrm{s}}-S_{\mathrm{s}})\cos\theta\sin\theta & D_{\mathrm{s}}\sin\theta & i(-P_s)\cos^2\theta+i(-S_{\mathrm{s}})\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{4.39}$$

$$=-\varepsilon_0 i\omega\begin{pmatrix} P_{\mathrm{s}}\sin^2\theta+S_{\mathrm{s}}\cos^2\theta & -iD_{\mathrm{s}}\cos\theta & (P_{\mathrm{s}}-S_{\mathrm{s}})\sin\theta\cos\theta \\ iD_{\mathrm{s}}\cos\theta & S_{\mathrm{s}} & -iD_{\mathrm{s}}\sin\theta \\ (P_{\mathrm{s}}-S_{\mathrm{s}})\cos\theta\sin\theta & iD_{\mathrm{s}}\sin\theta & P_s\cos^2\theta+S_{\mathrm{s}}\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{4.40}$$

となる。

電流密度ベクトルを時間で偏微分して、

$$\frac{\partial \boldsymbol{J}_s}{\partial t} \tag{4.41}$$

$$=\varepsilon_0\omega\begin{pmatrix} i\frac{{\omega_{\rm ps}}^2}{\omega^2}\sin^2\theta+i\frac{{\omega_{\rm ps}}^2}{\omega^2-{\omega_{\rm cs}}^2}\cos^2\theta & -\frac{{\omega_{\rm ps}}^2\omega_{\rm cs}}{\omega(\omega^2-{\omega_{\rm cs}}^2)}\cos\theta & -i\frac{{\omega_{\rm ps}}^2{\omega_{\rm cs}}^2}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{\rm cs}}^2)}\sin\theta\cos\theta \\ \frac{{\omega_{\rm ps}}^2\omega_{\rm cs}}{\omega(\omega^2-{\omega_{\rm cs}}^2)}\cos\theta & i\frac{{\omega_{\rm ps}}^2}{\omega^2-{\omega_{\rm cs}}^2} & -\frac{{\omega_{\rm ps}}^2\omega_{\rm cs}}{\omega(\omega^2-{\omega_{\rm cs}}^2)}\sin\theta \\ -i\frac{{\omega_{\rm ps}}^2{\omega_{\rm cs}}^2}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{\rm cs}}^2)}\cos\theta\sin\theta & \frac{{\omega_{\rm ps}}^2\omega_{\rm cs}\sin\theta}{\omega(\omega^2-{\omega_{\rm cs}}^2)} & i\frac{{\omega_{\rm ps}}^2}{\omega^2}\cos^2\theta+i\frac{{\omega_{ps}}^2}{\omega^2-{\omega_{cs}}^2}\sin^2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix}-i\omega E_X\\ -i\omega E_Y\\ -i\omega E_Z\end{pmatrix} \tag{4.42}$$

$$=-\varepsilon_0\omega^2\begin{pmatrix} -\frac{{\omega_{\rm ps}}^2}{\omega^2}\sin^2\theta-\frac{{\omega_{\rm ps}}^2}{\omega^2-{\omega_{\rm cs}}^2}\cos^2\theta & -i\frac{{\omega_{\rm ps}}^2\omega_{\rm cs}}{\omega(\omega^2-{\omega_{\rm cs}}^2)}\cos\theta & \frac{{\omega_{\rm ps}}^2{\omega_{\rm cs}}^2}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{\rm cs}}^2)}\sin\theta\cos\theta \\ i\frac{{\omega_{\rm ps}}^2\omega_{\rm cs}}{\omega(\omega^2-{\omega_{\rm cs}}^2)}\cos\theta & -\frac{{\omega_{\rm ps}}^2}{\omega^2-{\omega_{\rm cs}}^2} & -i\frac{{\omega_{\rm ps}}^2\omega_{\rm cs}}{\omega(\omega^2-{\omega_{\rm cs}}^2)}\sin\theta \\ \frac{{\omega_{\rm ps}}^2{\omega_{\rm cs}}^2}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{\rm cs}}^2)}\cos\theta\sin\theta & i\frac{{\omega_{\rm ps}}^2\omega_{\rm cs}\sin\theta}{\omega(\omega^2-{\omega_{\rm cs}}^2)} & -\frac{{\omega_{\rm ps}}^2}{\omega^2}\cos^2\theta-\frac{{\omega_{\rm ps}}^2}{\omega^2-{\omega_{\rm cs}}^2}\sin^2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_X\\ E_Y\\ E_Z\end{pmatrix} \tag{4.43}$$

さて、(??) 式の第１〜３項の計算を進めると、

$$\nabla^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)-\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t))-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2} \tag{4.44}$$

$$= -k^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)+k^2E_Z(\boldsymbol{r},t)\hat{\boldsymbol{Z}}+\varepsilon_0\mu_0\omega^2\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \tag{4.45}$$

$$= \varepsilon_0\mu_0\omega^2\begin{pmatrix} 1-\frac{k^2}{\varepsilon_0\mu_0\omega^2} & 0 & 0 \\ 0 & 1-\frac{k^2}{\varepsilon_0\mu_0\omega^2} & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_X(\boldsymbol{r},t)\\ E_Y(\boldsymbol{r},t)\\ E_Z(\boldsymbol{r},t)\end{pmatrix} \tag{4.46}$$

したがって、(??) 式は、

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}-\mu_0\sum_s\frac{\partial\boldsymbol{J}_s}{\partial t} \tag{4.47}$$

$$= \varepsilon_0\mu_0\omega^2\begin{pmatrix} P\sin^2\theta+S\cos^2\theta-N^2 & -iD\cos\theta & (P-S)\cos\theta\sin\theta \\ iD\cos\theta & S-N^2 & -iD\sin\theta \\ (P-S)\cos\theta\sin\theta & iD\sin\theta & P\cos^2\theta+S\sin^2\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_X\\ E_Y\\ E_Z\end{pmatrix} \tag{4.48}$$

$$= \boldsymbol{0} \tag{4.49}$$

である。ここで、

$$S=1+\sum_s S_s=1-\sum_s\frac{{\omega_{ps}}^2}{\omega^2-{\omega_{cs}}^2} \tag{4.50}$$

$$D=\sum_s D_s=\sum_s\frac{\omega_{cs}{\omega_{ps}}^2}{\omega(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)} \tag{4.51}$$

$$P=1+\sum_s P_s=1-\sum_s\frac{{\omega_{ps}}^2}{\omega^2} \tag{4.52}$$

$$N^2=\frac{k^2}{\varepsilon_0\mu_0\omega^2} \tag{4.53}$$

である。この結果から、$\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k}^*,\omega^*)\neq\{\boldsymbol{K}(\boldsymbol{k},\omega)\}^*$ であるのに注意が必要である。例えば、$\boldsymbol{K}_{XY}(\boldsymbol{k}^*,\omega^*)\neq\{\boldsymbol{K}_{XY}(\boldsymbol{k},\omega)\}^*$ である。

4.2 無磁場のときの波動

外部磁場が存在しない場合は、$S = P,\, D = 0$ となるので、波動方程式は、

$$\epsilon_0\mu_0\omega^2 \begin{pmatrix} P - N^2 & 0 & 0 \\ 0 & P - N^2 & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{4.54}$$

解が存在するための条件は、

$$(P - N^2)^2 P = 0 \tag{4.55}$$

したがって、解は $N^2 = P$ と $P = 0$。

4.2.0.0.0.1 $N^2 = P$ のとき $N^2 = P$ を代入した場合、

$$\epsilon_0\mu_0\omega^2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{4.56}$$

つまり、$E_X,\, E_Y$ は自由な値を取ることができる。また、$P = 0$ の場合を除いて $E_Z = 0$。

電流密度ベクトルは、

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{\sigma}_{\mathrm{s}}(\omega) \cdot \boldsymbol{E} = \epsilon_0\omega \begin{pmatrix} -iP & 0 & 0 \\ 0 & -iP & 0 \\ 0 & 0 & -iP \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{E} = \epsilon_0\omega(-iP)\boldsymbol{E} \tag{4.57}$$

ω が実数である場合、荷電粒子のエネルギー密度の時間変化の時間平均は、

$$\frac{\Re\left(\boldsymbol{E}^* \cdot \boldsymbol{J}\right)}{2} = 0 \tag{4.58}$$

すなわち、荷電粒子へのエネルギー注入はない。

4.2.0.0.0.2 $P = 0$ の場合 $P = 0$ を代入した場合、

$$\epsilon_0\mu_0\omega^2 \begin{pmatrix} -N^2 & 0 & 0 \\ 0 & -N^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{4.59}$$

つまり、E_Z は自由な値を取ることができる。また、$N = 0$ の場合を除き、$E_X = E_Y = 0$。

4.2.0.0.0.3 $N^2 = 0,\, P = 0$ である場合は、E_X、E_Y、E_Z は自由な値を取る事ができる。

まとめると、

$N^2 = P$	$E_X,\, E_Y$ は任意。$E_Z = 0$	横波
$P = 0$	$E_X = E_Y = 0$ E_Z は任意。	縦波
$N^2 = 0,\, P = 0$	$E_X,\, E_Y,\, E_Z$ は任意。	波でない振動

4.3 $\theta = 0$ 又は π のときの波動

$\theta = 0$ 又は π のときは、波動方程式にとりあえず $\sin\theta = 0$, $\cos^2\theta = 1$ を代入し、

$$\epsilon_0\mu_0\omega^2 \begin{pmatrix} S - N^2 & -iD\cos\theta & 0 \\ iD\cos\theta & S - N^2 & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{4.60}$$

解が存在するための条件は、

$$(S - N^2)^2 P - (-iD\cos\theta)(iD\cos\theta)P = 0 \tag{4.61}$$

$$P\{(S - N^2)^2 - D^2\} = 0 \tag{4.62}$$

したがって、解は $P = 0$、$N^2 = S \pm D$。

4.3.0.0.0.1 $P = 0$ の場合は、

$$\epsilon_0\mu_0\omega^2 \begin{pmatrix} S - N^2 & -iD\cos\theta & 0 \\ iD\cos\theta & S - N^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{4.63}$$

$(S - N^2)^2 - (-iD)iD = (S - N^2)^2 - D^2 = 0$ の場合を除き、$E_X = E_Y = 0$。E_Z は自由な値を取ることができる。$(S - N^2)^2 - D^2 = 0$ の場合は、$N^2 = S \pm D$ の場合を検討すればよい。

4.3.0.0.0.2 $N^2 = S \pm D$ の場合は、

$$\epsilon_0\mu_0\omega^2 \begin{pmatrix} \mp D & -iD\cos\theta & 0 \\ iD\cos\theta & \mp D & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{4.64}$$

$$\mp DE_X - iD\cos\theta E_Y = 0 \tag{4.65}$$

$D \neq 0$ の条件において、

$$\mp E_X - i\cos\theta E_Y = 0 \tag{4.66}$$

$$\mp E_X = i\cos\theta E_Y \tag{4.67}$$

$$E_X : E_Y = i\cos\theta : (\mp 1) \tag{4.68}$$

すなわち、$D = 0$ の場合を除き、$E_X : E_Y = i\cos\theta : (\mp 1)$、$P = 0$ の場合を除き $E_Z = 0$。

　$D = 0$ の場合は、E_X、E_Y ともに自由な値を取ることができる。$P = 0$ の場合、E_Z は自由な値を取ることができる。

　まとめると、

$N^2 = S + D$	$E_X : E_Y = i\cos\theta : (-1),\ E_Z = 0$	横波
$N^2 = S - D$	$E_X : E_Y = i\cos\theta : 1,\ E_Z = 0$	横波
$N^2 = S \pm D,\ D = 0$	$E_X,\ E_Y$ は任意。 $E_Z = 0$	横波
$N^2 = S \pm D,\ P = 0$	$E_X : E_Y = i\cos\theta : (-1),\ E_Z$ は任意。	ハイブリッド波
$P = 0$	$E_X = E_Y = 0\ E_Z$ は任意。	縦波

4.3.1 $S \pm D$ について

$$S \pm D = \left(1 - \sum_s \frac{{\omega_{ps}}^2}{\omega^2 - {\omega_{cs}}^2}\right) \pm \left(\sum_s \frac{\omega_{cs}{\omega_{ps}}^2}{\omega(\omega^2 - {\omega_{cs}}^2)}\right) \tag{4.69}$$

$$= \left(1 - \sum_s \frac{\omega{\omega_{ps}}^2}{\omega(\omega^2 - {\omega_{cs}}^2)}\right) \pm \left(\sum_s \frac{\omega_{cs}{\omega_{ps}}^2}{\omega(\omega^2 - {\omega_{cs}}^2)}\right) \tag{4.70}$$

$$= 1 - \sum_s \frac{\omega{\omega_{ps}}^2 \mp \omega_{cs}{\omega_{ps}}^2}{\omega(\omega^2 - {\omega_{cs}}^2)} \tag{4.71}$$

$$= 1 - \sum_s \frac{{\omega_{ps}}^2(\omega \mp \omega_{cs})}{\omega(\omega + \omega_{cs})(\omega - \omega_{cs})} \tag{4.72}$$

$$= 1 - \sum_s \frac{{\omega_{ps}}^2}{\omega(\omega \pm \omega_{cs})} \tag{4.73}$$

特に、電子と１成分のイオンからなる中性プラズマの場合は、

$$S \pm D = 1 - \frac{{\omega_{pe}}^2}{\omega(\omega \pm \omega_{ce})} - \frac{{\omega_{pi}}^2}{\omega(\omega \pm \omega_{ci})} \tag{4.74}$$

$$= 1 - \frac{{\omega_{pe}}^2(\omega \pm \omega_{ci})}{\omega(\omega \pm \omega_{ce})(\omega \pm \omega_{ci})} - \frac{{\omega_{pi}}^2(\omega \pm \omega_{ce})}{\omega(\omega \pm \omega_{ce})(\omega \pm \omega_{ci})} \tag{4.75}$$

$$= 1 - \frac{{\omega_{pe}}^2(\omega \pm \omega_{ci}) + {\omega_{pi}}^2(\omega \pm \omega_{ce})}{\omega(\omega \pm \omega_{ce})(\omega \pm \omega_{ci})} \tag{4.76}$$

$$= 1 - \frac{\omega({\omega_{pe}}^2 + {\omega_{pi}}^2) \pm ({\omega_{pe}}^2\omega_{ci} + {\omega_{pi}}^2\omega_{ce})}{\omega(\omega \pm \omega_{ce})(\omega \pm \omega_{ci})} \tag{4.77}$$

$$= 1 - \frac{\omega({\omega_{pe}}^2 + {\omega_{pi}}^2) \pm (\frac{{q_e}^2 n_e}{\varepsilon_0 m_e}\frac{q_i B_0}{m_i} + \frac{{q_i}^2 n_i}{\varepsilon_0 m_i}\frac{q_e B_0}{m_e})}{\omega(\omega \pm \omega_{ce})(\omega \pm \omega_{ci})} \tag{4.78}$$

$$= 1 - \frac{\omega({\omega_{pe}}^2 + {\omega_{pi}}^2) \pm \frac{q_e q_i B_0}{\varepsilon_0 m_e m_i}(q_e n_e + q_i n_i)}{\omega(\omega \pm \omega_{ce})(\omega \pm \omega_{ci})} \tag{4.79}$$

$$= 1 - \frac{\omega({\omega_{pe}}^2 + {\omega_{pi}}^2)}{\omega(\omega \pm \omega_{ce})(\omega \pm \omega_{ci})} \tag{4.80}$$

$$= 1 - \frac{{\omega_{pe}}^2 + {\omega_{pi}}^2}{(\omega \pm \omega_{ce})(\omega \pm \omega_{ci})} \tag{4.81}$$

$$\tag{4.82}$$

4.3.2 アルベン領域について

周波数が非常に小さいアルベン波領域では、

$$S \pm D = 1 - \frac{{\omega_{pe}}^2 + {\omega_{pi}}^2}{(\omega \pm \omega_{ce})(\omega \pm \omega_{ci})} \tag{4.83}$$

$$\simeq 1 - \frac{{\omega_{pe}}^2 + {\omega_{pi}}^2}{\omega_{ce}\omega_{ci}} \tag{4.84}$$

$$\simeq 1 - \frac{{\omega_{pe}}^2}{\omega_{ce}\omega_{ci}} \tag{4.85}$$

密度が非常に大きいとき、

$$\begin{aligned} S \pm D &\simeq -\frac{{\omega_{pe}}^2}{\omega_{ce}\omega_{ci}} \\ &= -\frac{{q_e}^2 n_e}{\varepsilon_0 m_e}\frac{m_e}{q_e B_0}\frac{m_i}{q_i B_0} \\ &= -\frac{q_e n_e}{\varepsilon_0}\frac{1}{B_0}\frac{m_i}{q_i B_0} \\ &= \frac{q_i n_i}{\varepsilon_0}\frac{1}{B_0}\frac{m_i}{q_i B_0} \\ &= \frac{n_i m_i}{\varepsilon_0 {B_0}^2} \end{aligned} \tag{4.86}$$

$N^2 = S \pm D$ に当てはめると、

$$\frac{k^2 c^2}{\omega^2} \simeq \frac{n_i m_i}{\varepsilon_0 {B_0}^2} \tag{4.87}$$

$$\frac{\omega^2}{k^2} \simeq \frac{\varepsilon_0 {B_0}^2}{n_i m_i} c^2 \tag{4.88}$$

$$= \frac{{B_0}^2}{\mu_0 n_i m_i} \tag{4.89}$$

4.4 $\theta = \pm\pi/2$ のときの波動

波動方程式には、とりあえず $\cos\theta = 0$, $\sin^2\theta = 1$ を代入して、

$$\begin{pmatrix} P - N^2 & 0 & 0 \\ 0 & S - N^2 & -iD\sin\theta \\ 0 & iD\sin\theta & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{4.90}$$

解が存在するための条件は、

$$(P - N^2)(S - N^2)S - (P - N^2)(-iD\sin\theta)(iD\sin\theta) = 0 \tag{4.91}$$

$$(P - N^2)\{(S - N^2)S - D^2\} = 0 \tag{4.92}$$

$$\tag{4.93}$$

から、解は $N^2 = P$ と $(S - N^2)S - D^2 = 0$。

$S \neq 0$ ならば、$(S - N^2)S - D^2 = 0$ の解は、

$$N^2 = \frac{S^2 - D^2}{S} \tag{4.94}$$

$S = 0$ の場合の解は、$D = 0$。しかし、$D = 0$ と $S = 0$ とが同時に成り立つとは考えにくい。

4.4.0.0.0.1 $N^2 = P$ の場合は、

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & S-P & -iD\sin\theta \\ 0 & iD\sin\theta & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{4.95}$$

$(S-P)S-(-iD\sin\theta)(iD\sin\theta) = (S-P)S-D^2 \neq 0$ の条件において、$E_Y = E_Z = 0$。E_X は自由な値を取ることができる。

$(S-P)S-D^2 = 0$ である場合は、$S-P = D^2/S$（ただし $S \neq 0$）として、

$$D^2/S \cdot E_Y - iD\sin\theta E_Z = 0 \tag{4.96}$$

$$D^2/S \cdot E_Y = iD\sin\theta E_Z \tag{4.97}$$

$$E_Y : E_Z = iD\sin\theta : D^2/S \tag{4.98}$$

$$E_Y : E_Z = iS\sin\theta : D \tag{4.99}$$

$(S-P)S-D^2 = 0$ かつ $S = 0$ である場合は、$D = 0$ となるから、

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{4.100}$$

したがって、$E_Y = 0$、E_Z は自由な値を取ることができる。

4.4.0.0.0.2 $N^2 = \frac{S^2-D^2}{S}$, $S \neq 0$ の場合は、

$$\begin{pmatrix} P-\frac{S^2-D^2}{S} & 0 & 0 \\ 0 & S-\frac{S^2-D^2}{S} & -iD\sin\theta \\ 0 & iD\sin\theta & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P-\frac{S^2-D^2}{S} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{D^2}{S} & -iD\sin\theta \\ 0 & iD\sin\theta & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{4.101}$$

$E_Y(iD\sin\theta) + E_Z S = 0$ を変形して、$E_Y(iD\sin\theta) = -E_Z S$。したがって、$P - \frac{S^2-D^2}{S} = 0$ の場合を除いて、$E_X = 0$、$E_Y : E_Z = (-S) : iD\sin\theta$。

$N^2 = \frac{S^2-D^2}{S}$, $S \neq 0$, $P - \frac{S^2-D^2}{S} = 0$ の場合は、

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{D^2}{S} & -iD\sin\theta \\ 0 & iD\sin\theta & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{4.102}$$

つまり、E_X は自由な値を取ることができる。一方、$E_Y(iD\sin\theta) = -E_Z S$。なお、$P - \frac{S^2-D^2}{S} = 0$ は、$N^2 = P$ である。

4.4.0.0.0.3 $S = 0$, $D = 0$ の場合は、

$$\begin{pmatrix} P-N^2 & 0 & 0 \\ 0 & -N^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{4.103}$$

$P - N^2 = 0$ の場合を除き、$E_X = 0$。$N^2 = 0$ の場合を除き $E_Y = 0$。E_Z は自由な値を取ることができる。$P - N^2 = 0$ の場合は E_X は自由な値を取ることができる。$N^2 = 0$ の場合は、E_Y は自由な値を取ることができる。

4.4.0.0.0.4 まとめると、

$N^2 = P$	E_X は任意。$E_Y = E_Z = 0$	横波
$N^2 = P$, $(S-P)S - D^2 = 0$	E_X は任意。$E_Y : E_Z = iS\sin\theta : D$	ハイブリッド波
$N^2 = P$, $(S-P)S - D^2 = 0$, $S = 0$	E_X は任意。$E_Y = 0$、E_Z は任意。	ハイブリッド波
$N^2 = \frac{S^2-D^2}{S}$	$E_X = 0$, $E_Y : E_Z = (-S) : iD\sin\theta$	ハイブリッド波
$N^2 = \frac{S^2-D^2}{S}$, $N^2 = P$	E_X は任意。 $E_Y : E_Z = (-S) : iD\sin\theta$	ハイブリッド波
$S = 0$, $D = 0$	$E_X = E_Y = 0$, E_Z は任意。	縦波
$S = 0$, $D = 0$, $N^2 = P$	E_X は任意。$E_Y = 0$, E_Z は任意。	ハイブリッド波
$S = 0$, $D = 0$, $N^2 = 0$	$E_X = 0$,E_Y は任意, E_Z は任意。	ハイブリッド波

4.4.1 アルベン波領域について

周波数が非常に小さいときの X 波を考える。

$$\begin{aligned}
S &= 1 - \sum_s \frac{{\omega_{ps}}^2}{\omega^2 - {\omega_{cs}}^2} && (4.104)\\
&\simeq 1 + \sum_s \frac{{\omega_{ps}}^2}{{\omega_{cs}}^2} && (4.105)\\
&= 1 + \sum_s \frac{{q_s}^2 n_s}{\varepsilon_0 m_s} \frac{{m_s}^2}{{q_s}^2 {B_0}^2} && (4.106)\\
&= 1 + \sum_s \frac{n_s m_s}{\varepsilon_0 {B_0}^2} && (4.107)
\end{aligned}$$

プラズマが電子と 1 成分のイオンのみからなるとすると、

$$\begin{aligned}
S &\simeq 1 + \sum_s \frac{n_s m_s}{\varepsilon_0 {B_0}^2} && (4.108)\\
&\simeq 1 + \frac{n_i m_i}{\varepsilon_0 {B_0}^2} && (4.109)
\end{aligned}$$

密度が十分に大きい場合、

$$S \simeq \frac{n_i m_i}{\varepsilon_0 {B_0}^2} \tag{4.110}$$

(5.33) 式も用いて、

$$\frac{S^2 - D^2}{S} = \frac{n_i m_i}{\varepsilon_0 {B_0}^2} \tag{4.111}$$

したがって、X 波において周波数が非常に低い場合はアルベン波となる。

この方程式の解が意味のある解を持つためには、行列式がゼロでなければならない。

$$(P\sin^2\theta + S\cos^2\theta - N^2)(S - N^2)(P\cos^2\theta + S\sin^2\theta) \tag{4.112}$$
$$+(-iD\cos\theta)(-iD\sin\theta)(P - S)\cos\theta\sin\theta \tag{4.113}$$
$$+(P - S)\cos\theta\sin\theta(iD\cos\theta)(iD\sin\theta) \tag{4.114}$$
$$-(P - S)\cos\theta\sin\theta(S - N^2)(P - S)\cos\theta\sin\theta \tag{4.115}$$
$$-(-iD\cos\theta)(iD\cos\theta)(P\cos^2\theta + S\sin^2\theta) \tag{4.116}$$
$$-(P\sin^2\theta + S\cos^2\theta - N^2)(-iD\sin\theta)(iD\sin\theta) \tag{4.117}$$
$$= (P\sin^2\theta + S\cos^2\theta - N^2)(S - N^2)(P\cos^2\theta + S\sin^2\theta) \tag{4.118}$$
$$-D^2(P - S)\cos^2\theta\sin^2\theta \tag{4.119}$$
$$-D^2(P - S)\cos^2\theta\sin^2\theta \tag{4.120}$$
$$-(P - S)^2(S - N^2)\cos^2\theta\sin^2\theta \tag{4.121}$$
$$-D^2\cos^2\theta(P\cos^2\theta + S\sin^2\theta) \tag{4.122}$$
$$-D^2\sin^2\theta(P\sin^2\theta + S\cos^2\theta - N^2) \tag{4.123}$$
$$= (PS\sin^2\theta + S^2\cos^2\theta - SN^2 - P\sin^2\theta N^2 - S\cos^2\theta N^2 + N^4)(P\cos^2\theta + S\sin^2\theta) \tag{4.124}$$
$$-2D^2(P - S)\cos^2\theta\sin^2\theta \tag{4.125}$$
$$-(P - S)^2 S\cos^2\theta\sin^2\theta + (P - S)^2\cos^2\theta\sin^2\theta N^2 \tag{4.126}$$
$$-D^2\cos^2\theta(P\cos^2\theta + S\sin^2\theta) \tag{4.127}$$
$$-D^2\sin^2\theta(P\sin^2\theta + S\cos^2\theta) + D^2\sin^2\theta N^2 \tag{4.128}$$
$$= (P\cos^2\theta + S\sin^2\theta)N^4 \tag{4.129}$$
$$-(S + P\sin^2\theta + S\cos^2\theta)(P\cos^2\theta + S\sin^2\theta)N^2 \tag{4.130}$$
$$+(P - S)^2\cos^2\theta\sin^2\theta N^2 \tag{4.131}$$
$$+D^2\sin^2\theta N^2 \tag{4.132}$$
$$+(PS\sin^2\theta + S^2\cos^2\theta)(P\cos^2\theta + S\sin^2\theta) \tag{4.133}$$
$$-2D^2(P - S)\cos^2\theta\sin^2\theta \tag{4.134}$$
$$-(P - S)^2 S\cos^2\theta\sin^2\theta \tag{4.135}$$
$$-D^2\cos^2\theta(P\cos^2\theta + S\sin^2\theta) \tag{4.136}$$
$$-D^2\sin^2\theta(P\sin^2\theta + S\cos^2\theta) \tag{4.137}$$
$$= (P\cos^2\theta + S\sin^2\theta)N^4 \tag{4.138}$$
$$-(SP\cos^2\theta + P^2\sin^2\theta\cos^2\theta + SP\cos^4\theta)N^2 \tag{4.139}$$
$$-(S^2\sin^2\theta + PS\sin^4\theta + S^2\cos^2\theta\sin^2\theta)N^2 \tag{4.140}$$
$$+(P^2\cos^2\theta\sin^2\theta - 2PS\cos^2\theta\sin^2\theta + S^2\cos^2\theta\sin^2\theta)N^2 \tag{4.141}$$
$$+D^2\sin^2\theta N^2 \tag{4.142}$$
$$+P^2 S\sin^2\theta\cos^2\theta + PS^2\cos^4\theta + PS^2\sin^4\theta + S^3\cos^2\theta\sin^2\theta \tag{4.143}$$
$$-2PD^2\cos^2\theta\sin^2\theta + 2SD^2\cos^2\theta\sin^2\theta \tag{4.144}$$
$$-P^2 S\cos^2\theta\sin^2\theta + 2PS^2\cos^2\theta\sin^2\theta - S^3\cos^2\theta\sin^2\theta \tag{4.145}$$
$$-PD^2\cos^4\theta - SD^2\cos^2\theta\sin^2\theta \tag{4.146}$$
$$-PD^2\sin^4\theta - SD^2\sin^2\theta\cos^2\theta \tag{4.147}$$
$$= (P\cos^2\theta + S\sin^2\theta)N^4 \tag{4.148}$$
$$-(SP\cos^2\theta + SP\cos^4\theta)N^2 \tag{4.149}$$
$$-(S^2\sin^2\theta + PS\sin^4\theta)N^2 \tag{4.150}$$
$$+(-2PS\cos^2\theta\sin^2\theta)N^2 \tag{4.151}$$

$$(P\cos^2\theta + S\sin^2\theta)N^4 - \{(S^2-D^2)\sin^2\theta + SP(1+\cos^2\theta)\}N^2 + P(S^2-D^2) = 0 \tag{4.159}$$

その解は、

$$\boxed{N^2 = \frac{(S^2-D^2)\sin^2\theta + SP(1+\cos^2\theta) \pm \sqrt{\{S(S-P)-D^2\}^2\sin^4\theta + 4P^2D^2\cos^2\theta}}{2(P\cos^2\theta + S\sin^2\theta)}} \tag{4.160}$$

である。

したがって、

$$(P\cos^2\theta + S\sin^2\theta)\times \tag{4.161}$$

$$\left\{N^2 - \frac{(S^2-D^2)\sin^2\theta + SP(1+\cos^2\theta) + \sqrt{\{S(S-P)-D^2\}^2\sin^4\theta + 4P^2D^2\cos^2\theta}}{2(P\cos^2\theta + S\sin^2\theta)}\right\}\times \tag{4.162}$$

$$\left\{N^2 - \frac{(S^2-D^2)\sin^2\theta + SP(1+\cos^2\theta) - \sqrt{\{S(S-P)-D^2\}^2\sin^4\theta + 4P^2D^2\cos^2\theta}}{2(P\cos^2\theta + S\sin^2\theta)}\right\} = 0 \tag{4.163}$$

ここでは、$P\cos^2\theta + S\sin^2\theta \neq 0$ としたが、$P\cos^2\theta + S\sin^2\theta = 0$ の場合は、注意が必要かもしれない。

ここで、E_X、E_Y、E_Z の比を求める。

$$\epsilon_0\mu_0\omega^2 \begin{pmatrix} P\sin^2\theta + S\cos^2\theta - N^2 & -iD\cos\theta & (P-S)\cos\theta\sin\theta \\ iD\cos\theta & S-N^2 & -iD\sin\theta \\ (P-S)\cos\theta\sin\theta & iD\sin\theta & P\cos^2\theta + S\sin^2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{4.164}$$

より、

$$(P\sin^2\theta + S\cos^2\theta - N^2)E_X - iD\cos\theta E_Y + (P-S)\cos\theta\sin\theta E_Z = 0 \tag{4.165}$$

$$(P-S)\cos\theta\sin\theta E_X + iD\sin\theta E_Y + (P\cos^2\theta + S\sin^2\theta)E_Z = 0 \tag{4.166}$$

$$(P\sin^3\theta + S\cos^2\theta\sin\theta - N^2\sin\theta)E_X - iD\cos\theta\sin\theta E_Y + (P-S)\cos\theta\sin^2\theta E_Z = 0 \tag{4.167}$$

$$(P-S)\cos^2\theta\sin\theta E_X + iD\sin\theta\cos\theta E_Y + (P\cos^3\theta + S\sin^2\theta\cos\theta)E_Z = 0 \tag{4.168}$$

両式を互いに足し合わせて、

$$(P-N^2)\sin\theta E_X + P\cos\theta E_Z = 0 \tag{4.169}$$

$E_X \neq 0$, $E_Z \neq 0$ ならば、

$$E_X : E_Z = P\cos\theta : (N^2-P)\sin\theta \tag{4.170}$$

$$(P-S)\cos\theta\sin\theta E_X + iD\sin\theta E_Y + (P\cos^2\theta + S\sin^2\theta)E_Z = 0 \tag{4.171}$$

$$P(P-S)\cos^2\theta\sin\theta E_X + iPD\sin\theta\cos\theta E_Y + P(P\cos^2\theta + S\sin^2\theta)\cos\theta E_Z = 0 \tag{4.172}$$

$$P(P-S)\cos^2\theta\sin\theta E_X + iPD\sin\theta\cos\theta E_Y + (P\cos^2\theta + S\sin^2\theta)(N^2-P)\sin\theta E_X = 0 \tag{4.173}$$

$$iPD\cos\theta E_Y + \{P(P-S)\cos^2\theta + (P\cos^2\theta + S\sin^2\theta)(N^2-P)\}E_X = 0 \tag{4.174}$$

$$iPD\cos\theta E_Y + \{(P\cos^2\theta + S\sin^2\theta)N^2 - PS\}E_X = 0 \tag{4.175}$$

$E_X \neq 0,\ E_Y \neq 0$ ならば、

$$E_X : E_Y = iPD\cos\theta : \{PS - (P\cos^2\theta + S\sin^2\theta)N^2\} \tag{4.176}$$

$E_X \neq 0,\ E_Y \neq 0,\ E_Z \neq 0$ ならば、

$$\boxed{E_X : E_Y : E_Z = iPD\cos\theta : \{PS - (P\cos^2\theta + S\sin^2\theta)N^2\} : iD(N^2 - P)\sin\theta} \tag{4.177}$$

4.4.2 偏波について考える。

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \begin{pmatrix} E_X(\boldsymbol{r},t) \\ E_Y(\boldsymbol{r},t) \\ E_Z(\boldsymbol{r},t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iPD\cos\theta A(\boldsymbol{r},t) \\ \{PS - (P\cos^2\theta + S\sin^2\theta)N^2\}A(\boldsymbol{r},t) \\ iD(N^2 - P)\sin\theta A(\boldsymbol{r},t) \end{pmatrix} \tag{4.178}$$

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \begin{pmatrix} iPD\cos\theta A_1(\boldsymbol{r},t) + iPD\cos\theta A_2(\boldsymbol{r},t) \\ \{PS - (P\cos^2\theta + S\sin^2\theta){N_1}^2\}A_1(\boldsymbol{r},t) + \{PS - (P\cos^2\theta + S\sin^2\theta){N_2}^2\}A_2(\boldsymbol{r},t) \\ iD({N_1}^2 - P)\sin\theta A_1(\boldsymbol{r},t) + iD({N_2}^2 - P)\sin\theta A_2(\boldsymbol{r},t) \end{pmatrix} \tag{4.179}$$

X 方向の直線偏波の場合、$E_Y = 0$ から、

$$\frac{A_1(\boldsymbol{r},t)}{A_2(\boldsymbol{r},t)} = -\frac{PS - (P\cos^2\theta + S\sin^2\theta){N_2}^2}{PS - (P\cos^2\theta + S\sin^2\theta){N_1}^2} \tag{4.180}$$

Y 方向の直線偏波の場合、$E_X = 0$ から、

$$\frac{A_1(\boldsymbol{r},t)}{A_2(\boldsymbol{r},t)} = -i \tag{4.181}$$

円偏波の場合は、$E_Y/E_X = \pm i$ から、

$$\frac{\{PS - (P\cos^2\theta + S\sin^2\theta){N_1}^2\}A_1(\boldsymbol{r},t) + \{PS - (P\cos^2\theta + S\sin^2\theta){N_2}^2\}A_2(\boldsymbol{r},t)}{iPD\cos\theta A_1(\boldsymbol{r},t) + iPD\cos\theta A_2(\boldsymbol{r},t)} = \pm i \tag{4.182}$$

$$\{PS - (P\cos^2\theta + S\sin^2\theta){N_1}^2\}A_1(\boldsymbol{r},t) + \{PS - (P\cos^2\theta + S\sin^2\theta){N_2}^2\}A_2(\boldsymbol{r},t) \tag{4.183}$$

$$= \pm i(iPD\cos\theta A_1(\boldsymbol{r},t) + iPD\cos\theta A_2(\boldsymbol{r},t)) \tag{4.184}$$

4.4.2.0.0.1 $P\cos^2\theta + S\sin^2\theta = 0$ だった場合の、偏波について。

$$S = -P\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta} \tag{4.185}$$

を波動方程式へ代入する。

$$\epsilon_0\mu_0\omega^2\begin{pmatrix} P\sin^2\theta+\left(-P\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)\cos^2\theta-N^2 & -iD\cos\theta & (P-\left(-P\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right))\cos\theta\sin\theta \\ iD\cos\theta & \left(-P\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)-N^2 & -iD\sin\theta \\ (P-\left(-P\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right))\cos\theta\sin\theta & iD\sin\theta & P\cos^2\theta+\left(-P\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)\sin^2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix}=\mathbf{0} \tag{4.186}$$

$$\epsilon_0\mu_0\omega^2\begin{pmatrix} P\left(\sin^2\theta-\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\cos^2\theta\right)-N^2 & -iD\cos\theta & P(1+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta})\cos\theta\sin\theta \\ iD\cos\theta & -P\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}-N^2 & -iD\sin\theta \\ P(1+\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta})\cos\theta\sin\theta & iD\sin\theta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix}=\mathbf{0} \tag{4.187}$$

$$\frac{\epsilon_0\mu_0\omega^2}{\sin^2\theta}\begin{pmatrix} P\left(\sin^4\theta-\cos^4\theta\right)-N^2 & -iD\sin^2\theta\cos\theta & P(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\cos\theta\sin\theta \\ iD\sin^2\theta\cos\theta & -P\cos^2\theta-N^2\sin^2\theta & -iD\sin^3\theta \\ P(\sin^2\theta+\cos^2\theta)\cos\theta\sin\theta & iD\sin^3\theta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix}=\mathbf{0} \tag{4.188}$$

$$\frac{\epsilon_0\mu_0\omega^2}{\sin^2\theta}\begin{pmatrix} P\left(\sin^2\theta-\cos^2\theta\right)-N^2 & -iD\sin^2\theta\cos\theta & P\cos\theta\sin\theta \\ iD\sin^2\theta\cos\theta & -P\cos^2\theta-N^2\sin^2\theta & -iD\sin^3\theta \\ P\cos\theta\sin\theta & iD\sin^3\theta & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix}=\mathbf{0} \tag{4.189}$$

行列式がゼロとなる条件から、

$$(-iD\sin^2\theta\cos\theta)(-iD\sin^3\theta)(P\cos\theta\sin\theta)+(P\cos\theta\sin\theta)(iD\sin^2\theta\cos\theta)(iD\sin^3\theta) \tag{4.190}$$

$$-(P\left(\sin^2\theta-\cos^2\theta\right)-N^2)(-iD\sin^3\theta)(iD\sin^3\theta)-(P\cos\theta\sin\theta)(-P\cos^2\theta-N^2\sin^2\theta)(P\cos\theta\sin\theta) \tag{4.191}$$

$$=-D^2P\sin^6\theta\cos^2\theta-D^2P\sin^6\theta\cos^2\theta-D^2(P\left(\sin^2\theta-\cos^2\theta\right)-N^2)\sin^6\theta-P^2(-P\cos^2\theta-N^2\sin^2\theta)\cos^2\theta\sin^2\theta \tag{4.192}$$

$$=-2D^2P\sin^6\theta\cos^2\theta-D^2(P\left(\sin^2\theta-\cos^2\theta\right))\sin^6\theta-D^2(-N^2)\sin^6\theta-P^2(-P\cos^2\theta)\cos^2\theta\sin^2\theta-P^2(-N^2\sin^2\theta)\,c \tag{4.193}$$

$$=-2D^2P\sin^6\theta\cos^2\theta-D^2P\left(\sin^2\theta-\cos^2\theta\right)\sin^6\theta+D^2N^2\sin^6\theta+P^3\cos^4\theta\sin^2\theta+P^2N^2\sin^4\theta\cos^2\theta \tag{4.194}$$

$$=0 \tag{4.195}$$

両辺を $\sin^2\theta$ で割って、

$$-2D^2P\sin^4\theta\cos^2\theta - D^2P\left(\sin^2\theta-\cos^2\theta\right)\sin^4\theta + D^2N^2\sin^4\theta + P^3\cos^4\theta + P^2N^2\sin^2\theta\cos^2\theta = 0 \tag{4.196}$$

$$D^2N^2\sin^4\theta + P^2N^2\sin^2\theta\cos^2\theta = 2D^2P\sin^4\theta\cos^2\theta + D \tag{4.197}$$

$$(D^2\sin^2\theta + P^2\cos^2\theta)\sin^2\theta N^2 = P(2D^2\sin^4\theta\cos^2\theta + \tag{4.198}$$

$$(D^2\sin^2\theta + P^2\cos^2\theta)\sin^2\theta N^2 = P(D^2\sin^4\theta\cos^2\theta + D \tag{4.199}$$

$$(D^2\sin^2\theta + P^2\cos^2\theta)\sin^2\theta N^2 = P(D^2\sin^4\theta - P^2\cos^4 \tag{4.200}$$

$$N^2 = \frac{P(D^2\sin^4\theta - P^2\cos}{(D^2\sin^2\theta + P^2\cos^2\theta} \tag{4.201}$$

4.5 $N\cos\theta$ が既知だった場合について

$N\cos\theta$ が既知だった場合について考える。

分散式 (4.159) は、

$$(P\cos^2\theta + S\sin^2\theta)N^4 - \{(S^2-D^2)\sin^2\theta + SP(1+\cos^2\theta)\}N^2 + P(S^2-D^2) \tag{4.202}$$

$$=(P\cos^2\theta + S\sin^2\theta)(\cos^2\theta+\sin^2\theta)N^4 - \{(S^2-D^2)\sin^2\theta + SP(\sin^2\theta+\cos^2\theta+\cos^2\theta)\}N^2 + P(S^2-D^2) \tag{4.203}$$

$$\begin{cases} {N_\parallel}^2 = N^2\cos^2\theta \\ {N_\perp}^2 = N^2\sin^2\theta \end{cases} \tag{4.204}$$

とおくと分散式は、

$$(P{N_\parallel}^2 + S{N_\perp}^2)({N_\parallel}^2 + {N_\perp}^2) - \{(S^2-D^2){N_\perp}^2 + SP({N_\perp}^2 + 2{N_\parallel}^2)\} + P(S^2-D^2) = 0 \tag{4.205}$$

$$P{N_\parallel}^4 + (S+P){N_\perp}^2{N_\parallel}^2 + S{N_\perp}^4 - (S^2-D^2){N_\perp}^2 - SP({N_\perp}^2 + 2{N_\parallel}^2) + P(S^2-D^2) = 0 \tag{4.206}$$

$$S{N_\perp}^4 + P{N_\parallel}^4 + (S+P){N_\perp}^2{N_\parallel}^2 - (S^2-D^2){N_\perp}^2 - SP{N_\perp}^2 - 2SP{N_\parallel}^2 + P(S^2-D^2) = 0 \tag{4.207}$$

$$S{N_\perp}^4 + (S+P){N_\perp}^2{N_\parallel}^2 - (S^2-D^2){N_\perp}^2 - SP{N_\perp}^2 + P{N_\parallel}^4 - 2SP{N_\parallel}^2 + P(S^2-D^2) = 0 \tag{4.208}$$

$$S{N_\perp}^4 + \{(S+P){N_\parallel}^2 - (S^2-D^2) - SP\}{N_\perp}^2 + P{N_\parallel}^4 - 2SP{N_\parallel}^2 + P(S^2-D^2) = 0 \tag{4.209}$$

二次方程式の解の公式から、${N_\perp}^2$ を求めると、

$${N_\perp}^2 = \frac{-\{(S+P){N_\parallel}^2 - (S^2-D^2) - SP\} \pm \sqrt{\{(S+P){N_\parallel}^2 - (S^2-D^2) - SP\}^2 - 4S\{P{N_\parallel}^4 - 2SP{N_\parallel}^2 + P(S^2-D^2)}}{2S} \tag{4.210}$$

根号の中を抜き出す。

$$
\begin{aligned}
&\{(S+P){N_\parallel}^2-(S^2-D^2)-SP\}^2-4S\{P{N_\parallel}^4-2SP{N_\parallel}^2+P(S^2-D^2)\}\\
=&(S+P)^2{N_\parallel}^4-2(S+P)((S^2-D^2)+SP){N_\parallel}^2+((S^2-D^2)+SP)^2\\
&-4SP{N_\parallel}^4+8S^2P{N_\parallel}^2-4SP(S^2-D^2) \qquad (4.211)\\
=&(S+P)^2{N_\parallel}^4-4SP{N_\parallel}^4-2(S+P)((S^2-D^2)+SP){N_\parallel}^2+8S^2P{N_\parallel}^2\\
&+((S^2-D^2)+SP)^2-4SP(S^2-D^2) \qquad (4.212)\\
=&(S-P)^2{N_\parallel}^4\\
&-2\{S^3-SD^2+S^2P+PS^2-PD^2+P^2S\}{N_\parallel}^2+8S^2P{N_\parallel}^2\\
&+\{(S^2-D^2)^2+2(S^2-D^2)SP+S^2P^2\}-4SP(S^2-D^2) \qquad (4.213)\\
=&(S-P)^2{N_\parallel}^4\\
&-2\{S^3-2S^2P+P^2S-SD^2-PD^2\}{N_\parallel}^2\\
&+\{(S^2-D^2)^2-2(S^2-D^2)SP+S^2P^2\} \qquad (4.214)\\
=&(S-P)^2{N_\parallel}^4\\
&-2\{S(S-P)^2-(S+P)D^2\}{N_\parallel}^2\\
&+\{(S^2-D^2)-SP\}^2 \qquad (4.215)
\end{aligned}
$$

4.5.0.0.1　磁場を求める

$$\nabla\times\Re(\boldsymbol{E})=-\frac{\partial\Re(\boldsymbol{B})}{\partial t} \qquad (4.216)$$

より、

$$i\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}-i\boldsymbol{k}^*\times\boldsymbol{E}^*=-(-i\omega)\boldsymbol{B}-(+i\omega^*)\boldsymbol{B}^* \qquad (4.217)$$

$$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}=\omega\boldsymbol{B} \qquad (4.218)$$

及び

$$\boldsymbol{k}^*\times\boldsymbol{E}^*=\omega^*\boldsymbol{B}^* \qquad (4.219)$$

$$\boldsymbol{B}=\frac{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{E}}{\omega}=\frac{\boldsymbol{k}c\times\boldsymbol{E}}{c\omega}=\frac{1}{c}(\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{E}) \qquad (4.220)$$

成分で表示すると、

$$\begin{pmatrix} B_X\\ B_Y\\ B_Z\end{pmatrix}=\frac{1}{c}\begin{vmatrix}\hat{\boldsymbol{X}} & \hat{\boldsymbol{Y}} & \hat{\boldsymbol{Z}}\\ N_X & N_Y & N_Z\\ E_X & E_Y & E_Z\end{vmatrix}=\frac{1}{c}\begin{pmatrix} N_YE_Z-N_ZE_Y\\ N_ZE_X-N_XE_Z\\ N_XE_Y-N_YE_X\end{pmatrix} \qquad (4.221)$$

複素共役成分も同様。

特に、波数ベクトルが Z 方向を向いている場合は、

$$\begin{pmatrix} B_X\\ B_Y\\ B_Z\end{pmatrix}=\frac{1}{c}\begin{pmatrix} -NE_Y\\ NE_X\\ 0\end{pmatrix} \qquad (4.222)$$

4.5.0.0.2　電流を求める

$$\boldsymbol{J}_s = \frac{{q_s}^2 n_{s0}}{m_s\omega(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)}\begin{pmatrix} i(\omega^2-{\omega_{cs}}^2\sin^2\theta)E_X-\omega\omega_{cs}\cos\theta E_Y-i{\omega_{cs}}^2\sin\theta\cos\theta E_Z \\ \omega\omega_{cs}\cos\theta E_X+i\omega^2E_Y-\omega\omega_{cs}\sin\theta E_Z \\ -i{\omega_{cs}}^2\cos\theta\sin\theta E_X+\omega\omega_{cs}\sin\theta E_Y+i(\omega^2-{\omega_{cs}}^2\cos^2\theta)E_Z \end{pmatrix} \tag{4.223}$$

$$= \epsilon_0\omega\begin{pmatrix} i\frac{{\omega_{ps}}^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2\sin^2\theta)}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)} & -\frac{{\omega_{ps}}^2\omega\omega_{cs}\cos\theta}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)} & -i\frac{{\omega_{ps}}^2{\omega_{cs}}^2\sin\theta\cos\theta}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)} \\ \frac{{\omega_{ps}}^2\omega\omega_{cs}\cos\theta}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)} & i\frac{{\omega_{ps}}^2\omega^2}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)} & -\frac{{\omega_{ps}}^2\omega\omega_{cs}\sin\theta}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)} \\ -i\frac{{\omega_{ps}}^2{\omega_{cs}}^2\cos\theta\sin\theta}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)} & \frac{{\omega_{ps}}^2\omega\omega_{cs}\sin\theta}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)} & i\frac{{\omega_{ps}}^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2\cos^2\theta)}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix} \tag{4.224}$$

したがって、

$$\boldsymbol{J} = \sum_s \boldsymbol{J}_s \tag{4.225}$$

$$= \epsilon_0\omega\begin{pmatrix} i(1-P\sin^2\theta-S\cos^2\theta) & -D\cos\theta & -i(P-S)\sin\theta\cos\theta \\ D\cos\theta & i(1-S) & -D\sin\theta \\ -i(P-S)\sin\theta\cos\theta & D\sin\theta & i(1-P\cos^2\theta-S\sin^2\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix} \tag{4.226}$$

4.5.0.0.3　荷電粒子の運動を求める

$$\boldsymbol{v}_s = \frac{\epsilon_0\omega}{q_s n_{s0}}\begin{pmatrix} -i(P_s\sin^2\theta+S_s\cos^2\theta) & -D_s\cos\theta & -i(P_s-S_s)\sin\theta\cos\theta \\ D_s\cos\theta & -iS_s & -D_s\sin\theta \\ -i(P_s-S_s)\sin\theta\cos\theta & D_s\sin\theta & -i(P_s\cos^2\theta+S_s\sin^2\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix} \tag{4.227}$$

$$= -\frac{i\epsilon_0\omega}{q_s n_{s0}}\begin{pmatrix} K_{XXs} & K_{XYs} & K_{XZs} \\ K_{YXs} & K_{YYs} & K_{YZs} \\ K_{ZXs} & K_{YZs} & K_{ZZs} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix} \tag{4.228}$$

を、時間積分すればよい。

$$\boldsymbol{r}_s = \frac{i}{\omega}\boldsymbol{v}_s \tag{4.229}$$

$$= \frac{\epsilon_0}{q_s n_{s0}}\begin{pmatrix} P_s\sin^2\theta+S_s\cos^2\theta & -iD_s\cos\theta & (P_s-S_s)\sin\theta\cos\theta \\ iD_s\cos\theta & S_s & -iD_s\sin\theta \\ (P_s-S_s)\sin\theta\cos\theta & iD_s\sin\theta & P_s\cos^2\theta+S_s\sin^2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix} \tag{4.230}$$

$$= \frac{\epsilon_0}{q_s n_{s0}}\begin{pmatrix} K_{XXs} & K_{XYs} & K_{XZs} \\ K_{YXs} & K_{YYs} & K_{YZs} \\ K_{ZXs} & K_{YZs} & K_{ZZs} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix} \tag{4.231}$$

4.5.0.0.4　荷電粒子にはたらく力　荷電粒子 s にはたらく電場による力 $\boldsymbol{F}_{Es}$ は、

$$\boldsymbol{F}_{Es} = q_s\boldsymbol{E} \tag{4.232}$$

で与えられる。

また、ローレンツ力 $\boldsymbol{F}_{Bs}$ は、

$$\boldsymbol{F}_{Bs} = q_s(\boldsymbol{v}_s\times\boldsymbol{B}) \tag{4.233}$$

で与えられる。ここでは、１次の量は非常に小さいとしているから、波動磁場の寄与を無視して、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F}_{Bs} &= q_s(\boldsymbol{v}_s \times \boldsymbol{B}_0) & (4.234)\\ &= q_s \begin{vmatrix} \hat{\boldsymbol{X}} & \hat{\boldsymbol{Y}} & \hat{\boldsymbol{Z}} \\ v_{sX} & v_{sY} & v_{sZ} \\ B_{0X} & B_{0Y} & B_{0Z} \end{vmatrix} & (4.235)\\ &= q_s \begin{pmatrix} v_{sY}B_{0Z} - v_{sZ}B_{0Y} \\ v_{sZ}B_{0X} - v_{sX}B_{0Z} \\ v_{sX}B_{0Y} - v_{sY}B_{0X} \end{pmatrix} & (4.236)\\ & & (4.237)\end{aligned}$$

として取り扱う。

4.5.0.0.5　荷電粒子のエネルギー密度の時間変化

ω が実数の場合、

$$\frac{\Re\left(\boldsymbol{E}^* \cdot \boldsymbol{J}\right)}{2} \tag{4.238}$$

$$= \frac{1}{2}\Re\left(\begin{pmatrix} E_X{}^* \\ E_Y{}^* \\ E_Z{}^* \end{pmatrix} \cdot \varepsilon_0\omega \begin{pmatrix} i(1-P\sin^2\theta - S\cos^2\theta) & -D\cos\theta & -i(P-S)\sin\theta\cos\theta \\ D\cos\theta & i(1-S) & -D\sin\theta \\ -i(P-S)\sin\theta\cos\theta & D\sin\theta & i(1-P\cos^2\theta - S\sin^2\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix}\right) \tag{4.239}$$

$$= \frac{1}{2}\Re\left(\varepsilon_0\omega\begin{pmatrix} E_X{}^* \\ E_Y{}^* \\ E_Z{}^* \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i(1-P\sin^2\theta - S\cos^2\theta)E_X - D\cos\theta E_Y - i(P-S)\sin\theta\cos\theta E_Z \\ D\cos\theta E_X + i(1-S)E_Y - D\sin\theta E_Z \\ -i(P-S)\sin\theta\cos\theta E_X + D\sin\theta E_Y + i(1-P\cos^2\theta - S\sin^2\theta)E_Z \end{pmatrix}\right) \tag{4.240}$$

$$= \frac{1}{2}\Re\left(\varepsilon_0\omega\begin{pmatrix} i(1-P\sin^2\theta - S\cos^2\theta)E_X{}^*E_X - D\cos\theta E_X{}^*E_Y - i(P-S)\sin\theta\cos\theta E_X{}^*E_Z \\ +D\cos\theta E_Y{}^*E_X + i(1-S)E_Y{}^*E_Y - D\sin\theta E_Y{}^*E_Z \\ -i(P-S)\sin\theta\cos\theta E_Z{}^*E_X + D\sin\theta E_Z{}^*E_Y + i(1-P\cos^2\theta - S\sin^2\theta)E_Z{}^*E_Z \end{pmatrix}\right) \tag{4.241}$$

$$= \frac{1}{2}\Re\left(\varepsilon_0\omega\begin{pmatrix} i(1-P\sin^2\theta - S\cos^2\theta)E_X{}^*E_X + i(1-S)E_Y{}^*E_Y + i(1-P\cos^2\theta - S\sin^2\theta)E_Z{}^*E_Z \\ -D\sin\theta(E_Y{}^*E_Z - E_Z{}^*E_Y) - D\cos\theta(E_X{}^*E_Y - E_Y{}^*E_X) - i(P-S)\sin\theta\cos\theta(E_X{}^*E_Z + E_Z{}^*E_X) \end{pmatrix}\right) \tag{4.242}$$

したがって、ω が実数の場合、P、S、D は実数になるから、

$$\frac{\Re\left(\boldsymbol{E}^* \cdot \boldsymbol{J}\right)}{2} = 0 \tag{4.243}$$

つまり、コールドの場合、波動のエネルギーが荷電粒子に与えられることはない。

4.6 $S-P$ の計算

$$
\begin{aligned}
&S-P && (4.244)\\
&=\left(1-\frac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2}{\omega^2-{\omega_{\mathrm{cs}}}^2}\right)-\left(1-\frac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2}{\omega^2}\right) && (4.245)\\
&=-\frac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2}{\omega^2-{\omega_{\mathrm{cs}}}^2}+\frac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2}{\omega^2} && (4.246)\\
&=-\frac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2\omega^2}{(\omega^2-{\omega_{\mathrm{cs}}}^2)\omega^2}+\frac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2(\omega^2-{\omega_{\mathrm{cs}}}^2)}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{\mathrm{cs}}}^2)} && (4.247)\\
&=-\frac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2{\omega_{\mathrm{cs}}}^2}{(\omega^2-{\omega_{\mathrm{cs}}}^2)\omega^2} && (4.248)
\end{aligned}
$$

4.7 移動度テンソルの導出

$$
\begin{pmatrix} {v_{s1X}}^* \\ {v_{s1Y}}^* \\ {v_{s1Z}}^* \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix}
\frac{q_s}{im_s\omega^*}{E_X}^*+\frac{q_s}{im_s\omega^*}{v_{s1Y}}^*B_0\cos\theta \\
\frac{q_s}{im_s\omega^*}{E_Y}^*+\frac{q_s}{im_s\omega^*}{v_{s1Z}}^*B_0\sin\theta-\frac{q_s}{im_s\omega^*}{v_{s1X}}^*B_0\cos\theta \\
\frac{q_s}{im_s\omega^*}{E_Z}^*-\frac{q_s}{im_s\omega^*}{v_{s1Y}}^*B_0\sin\theta
\end{pmatrix}
\tag{4.249}
$$

$$
=
\begin{pmatrix}
\frac{q_s}{im_s\omega^*}{E_X}^*+\frac{\omega_{cs}}{i\omega^*}{v_{s1Y}}^*\cos\theta \\
\frac{q_s}{im_s\omega^*}{E_Y}^*+\frac{\omega_{cs}}{i\omega^*}{v_{s1Z}}^*\sin\theta-\frac{\omega_{cs}}{i\omega^*}{v_{s1X}}^*\cos\theta \\
\frac{q_s}{im_s\omega^*}{E_Z}^*-\frac{\omega_{cs}}{i\omega^*}{v_{s1Y}}^*\sin\theta
\end{pmatrix}
\tag{4.250}
$$

${v_{s1Y}}^*$ の式に代入。

$$
\begin{aligned}
&{v_{s1Y}}^* && (4.251)\\
&= \frac{q_s}{im_s\omega^*}{E_Y}^*+\frac{\omega_{cs}}{i\omega^*}(\frac{q_s}{im_s\omega^*}{E_Z}^*-\frac{\omega_{cs}}{i\omega^*}{v_{s1Y}}^*\sin\theta)\sin\theta-\frac{\omega_{cs}}{i\omega^*}(\frac{q_s}{im_s\omega^*}{E_X}^*+\frac{\omega_{cs}}{i\omega^*}{v_{s1Y}}^*\cos\theta)\cos\theta && (4.252)\\
&= \frac{q_s}{im_s\omega^*}{E_Y}^*+\frac{\omega_{cs}}{i\omega^*}\frac{q_s}{im_s\omega^*}{E_Z}^*\sin\theta-\frac{\omega_{cs}}{i\omega^*}\frac{\omega_{cs}}{i\omega^*}{v_{s1Y}}^*\sin^2\theta-\frac{\omega_{cs}}{i\omega^*}\frac{q_s}{im_s\omega^*}{E_X}^*\cos\theta-\frac{\omega_{cs}}{i\omega^*}\frac{\omega_{cs}}{i\omega^*}{v_{s1Y}}^*\cos^2\theta && (4.253)\\
&= \frac{q_s}{im_s\omega^*}{E_Y}^*-\frac{\omega_{cs}}{\omega^*}\frac{q_s}{m_s\omega^*}{E_Z}^*\sin\theta+\frac{\omega_{cs}}{\omega^*}\frac{q_s}{m_s\omega^*}{E_X}^*\cos\theta+\frac{\omega_{cs}}{\omega^*}\frac{\omega_{cs}}{\omega^*}{v_{s1Y}}^* && (4.254)\\
&{\omega^*}^2{v_{s1Y}}^* && (4.255)\\
&= \frac{q_s\omega^*}{im_s}{E_Y}^*-\frac{q_s\omega_{cs}}{m_s}{E_Z}^*\sin\theta+\frac{q_s\omega_{cs}}{m_s}{E_X}^*\cos\theta+{\omega_{cs}}^2{v_{s1Y}}^* && (4.256)\\
&\omega^*({\omega^*}^2-{\omega_{cs}}^2){v_{s1Y}}^* && (4.257)\\
&= \frac{q_s{\omega^*}^2}{im_s}{E_Y}^*-\frac{q_s\omega_{cs}\omega^*}{m_s}{E_Z}^*\sin\theta+\frac{q_s\omega_{cs}\omega^*}{m_s}{E_X}^*\cos\theta && (4.258)\\
&{v_{s1Y}}^* && (4.259)\\
&= \frac{q_s}{m_s\omega^*({\omega^*}^2-{\omega_{cs}}^2)}(-i{\omega^*}^2{E_Y}^*-\omega_{cs}\omega^*{E_Z}^*\sin\theta+\omega_{cs}\omega^*{E_X}^*\cos\theta) && (4.260)\\
& && (4.261)
\end{aligned}
$$

${v_{s1X}}^*$ の式に代入。

$$
\begin{aligned}
&{v_{s1X}}^* &(4.262)\\
&= \frac{q_s}{im_s\omega^*}{E_X}^* + \frac{\omega_{cs}}{i\omega^*}\left(\frac{q_s}{m_s\omega^*({\omega^*}^2-{\omega_{cs}}^2)}(-i{\omega^*}^2{E_Y}^* - \omega_{cs}\omega^*{E_Z}^*\sin\theta + \omega_{cs}\omega^*{E_X}^*\cos\theta)\right)\cos\theta &(4.263)\\
&\frac{m_s\omega^*({\omega^*}^2-{\omega_{cs}}^2)}{q_s}{v_{s1X}}^* &(4.264)\\
&= \frac{1}{i}({\omega^*}^2-{\omega_{cs}}^2){E_X}^* + \frac{\omega_{cs}}{i\omega^*}((-i{\omega^*}^2{E_Y}^* - \omega_{cs}\omega^*{E_Z}^*\sin\theta + \omega_{cs}\omega^*{E_X}^*\cos\theta))\cos\theta &(4.265)\\
&= -i({\omega^*}^2-{\omega_{cs}}^2){E_X}^* - \omega^*\omega_{cs}\cos\theta{E_Y}^* + i{\omega_{cs}}^2{E_Z}^*\sin\theta\cos\theta - i{\omega_{cs}}^2{E_X}^*\cos^2\theta &(4.266)\\
&= -i\{{\omega^*}^2-{\omega_{cs}}^2\sin^2\theta\}{E_X}^* - \omega^*\omega_{cs}\cos\theta{E_Y}^* + i{\omega_{cs}}^2{E_Z}^*\sin\theta\cos\theta &(4.267)
\end{aligned}
$$

${v_{s1Z}}^*$ についても同様の結果が得られるだろう。

4.8 数値計算のための変形

$$
N^2 = \frac{(S^2-D^2)\sin^2\theta + SP(1+\cos^2\theta) \pm \sqrt{\{S(S-P)-D^2\}^2\sin^4\theta + 4P^2D^2\cos^2\theta}}{2(P\cos^2\theta + S\sin^2\theta)} \tag{4.268}
$$

の式を変形する。

$$
\begin{aligned}
N^2 &= \frac{(S^2-D^2)\sin^2\theta + SP(1+\cos^2\theta) \pm \sqrt{\{S(S-P)-D^2\}^2\sin^4\theta\left[1+\frac{4P^2D^2\cos^2\theta}{\{S(S-P)-D^2\}^2\sin^4\theta}\right]}}{2(P\cos^2\theta + S\sin^2\theta)} &(4.269)\\
&= \frac{(S^2-D^2)\sin^2\theta + SP(1+\cos^2\theta) \pm \{S(S-P)-D^2\}\sin^2\theta\sqrt{1+\frac{4P^2D^2\cos^2\theta}{\{S(S-P)-D^2\}^2\sin^4\theta}}}{2(P\cos^2\theta + S\sin^2\theta)} &(4.270)\\
&= \frac{(S^2-SP-D^2)\sin^2\theta + SP\sin^2\theta + SP(1+\cos^2\theta) \pm \{S(S-P)-D^2\}\sin^2\theta\sqrt{1+\frac{4P^2D^2\cos^2\theta}{\{S(S-P)-D^2\}^2\sin^4\theta}}}{2(P\cos^2\theta + S\sin^2\theta)} &(4.271)\\
&= \frac{\{S(S-P)-D^2\}\sin^2\theta + 2SP \pm \{S(S-P)-D^2\}\sin^2\theta\sqrt{1+\frac{4P^2D^2\cos^2\theta}{\{S(S-P)-D^2\}^2\sin^4\theta}}}{2(P\cos^2\theta + S\sin^2\theta)} &(4.272)\\
&= \frac{\{S(S-P)-D^2\}\sin^2\theta\left(1\pm\sqrt{1+\frac{4P^2D^2\cos^2\theta}{\{S(S-P)-D^2\}^2\sin^4\theta}}\right) + 2SP}{2(P\cos^2\theta + S\sin^2\theta)} &(4.273)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{cases}
\mathtt{x} = \{S(S-P)-D^2\}\sin^2\theta \\
\mathtt{y} = \dfrac{4P^2D^2\cos^2\theta}{\{S(S-P)-D^2\}^2\sin^4\theta} \\
\mathtt{z} = P\cos^2\theta + S\sin^2\theta
\end{cases} \tag{4.274}
$$

とすると、

$$
N^2 = \frac{\mathtt{x}\,(1\pm\sqrt{1+\mathtt{y}}) + 2SP}{2\mathtt{z}} \tag{4.275}
$$

特に、$\mathtt{y} << 1$ の場合は、

$$N^2 = \frac{\mathtt{x}\left\{1 \pm \left(1 + \frac{\mathtt{y}}{2} + \frac{\mathtt{y}^2}{8} + \frac{\mathtt{y}^3}{16}\right)\right\} + 2SP}{2\mathtt{z}} \tag{4.276}$$

$$\mathtt{f}(\mathtt{y}) = \frac{\mathtt{y}}{2} + \frac{\mathtt{y}^2}{8} + \frac{\mathtt{y}^3}{16} \tag{4.277}$$

とすると、

$$N^2 = \frac{\mathtt{x}\left\{1 \pm (1 + \mathtt{f}(\mathtt{y}))\right\} + 2SP}{2\mathtt{z}} \tag{4.278}$$

$$= \frac{2\mathtt{x} + 2SP + \mathtt{x}\mathtt{f}(\mathtt{y})}{2\mathtt{z}}, \frac{2SP - \mathtt{x}\mathtt{f}(\mathtt{y})}{2\mathtt{z}} \tag{4.279}$$

なお、根号 $\sqrt{\ }$ 前の $\pm$ による大小は、$\frac{\mathtt{x}}{2\mathtt{z}}$ の正負によって変わる。

4.9 静電波について

静電波の分散式は (1.102) 式で表されるから、冷たいプラズマの場合、

$$\epsilon_0 \omega i \frac{{\omega_{ps}}^2(\omega^2 - {\omega_{cs}}^2 \cos^2\theta)}{\omega^2(\omega^2 - {\omega_{cs}}^2)} - i\omega\varepsilon_0 = 0 \tag{4.280}$$

4.10 周波数が非常に大きい場合

$|\omega| >> \omega_{\mathrm{ps}}, \omega_{\mathrm{cs}}$ の場合について考える。(4.159) 式は、

$$(P\cos^2\theta + S\sin^2\theta)N^4 - \{(S^2 - D^2)\sin^2\theta + SP(1 + \cos^2\theta)\}N^2 + P(S^2 - D^2) = 0 \tag{4.281}$$

$$S = 1 - \sum_{\mathrm{s}} \frac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2}{\omega^2 - {\omega_{\mathrm{cs}}}^2} \tag{4.282}$$

$$D = \sum_{\mathrm{s}} \frac{\omega_{\mathrm{cs}}{\omega_{\mathrm{ps}}}^2}{\omega(\omega^2 - {\omega_{\mathrm{cs}}}^2)} \tag{4.283}$$

$$P = 1 - \sum_{\mathrm{s}} \frac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2}{\omega^2} \tag{4.284}$$

を代入して、

$$P\cos^2\theta + S\sin^2\theta = \left(1 - \sum_{\mathrm{s}} \frac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2}{\omega^2}\right)\cos^2\theta + \left(1 - \sum_{\mathrm{s}} \frac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2}{\omega^2 - {\omega_{\mathrm{cs}}}^2}\right)\sin^2\theta \tag{4.285}$$

$$= 1 - \sum_{\mathrm{s}} \left(\frac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2}{\omega^2}\cos^2\theta + \frac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2}{\omega^2 - {\omega_{\mathrm{cs}}}^2}\sin^2\theta\right) \tag{4.286}$$

$$= 1 - \sum_{\mathrm{s}} \left(\frac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2(\omega^2 - {\omega_{\mathrm{cs}}}^2)}{\omega^2(\omega^2 - {\omega_{\mathrm{cs}}}^2)}\cos^2\theta + \frac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2\omega^2}{\omega^2(\omega^2 - {\omega_{\mathrm{cs}}}^2)}\sin^2\theta\right) \tag{4.287}$$

$$= 1 - \sum_{\mathrm{s}} \frac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2(\omega^2 - {\omega_{\mathrm{cs}}}^2\cos^2\theta)}{\omega^2(\omega^2 - {\omega_{\mathrm{cs}}}^2)} \tag{4.288}$$

$$
\begin{aligned}
S^2 - D^2 =&(S+D)(S-D) && (4.289)\\
=&\left(1-\sum_{\mathrm{s}}\frac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2}{\omega^2-{\omega_{\mathrm{cs}}}^2}+\sum_{\mathrm{s}}\frac{\omega_{\mathrm{cs}}{\omega_{\mathrm{ps}}}^2}{\omega(\omega^2-{\omega_{\mathrm{cs}}}^2)}\right)\left(1-\sum_{\mathrm{s}}\frac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2}{\omega^2-{\omega_{\mathrm{cs}}}^2}-\sum_{\mathrm{s}}\frac{\omega_{\mathrm{cs}}{\omega_{\mathrm{ps}}}^2}{\omega(\omega^2-{\omega_{\mathrm{cs}}}^2)}\right) && (4.290)\\
=&\left(1-\sum_{\mathrm{s}}\frac{\omega{\omega_{\mathrm{ps}}}^2-\omega_{\mathrm{cs}}{\omega_{\mathrm{ps}}}^2}{\omega(\omega^2-{\omega_{\mathrm{cs}}}^2)}\right)\left(1-\sum_{\mathrm{s}}\frac{\omega{\omega_{\mathrm{ps}}}^2+\omega_{\mathrm{cs}}{\omega_{\mathrm{ps}}}^2}{\omega(\omega^2-{\omega_{\mathrm{cs}}}^2)}\right) && (4.291)\\
=&\left(1-\sum_{\mathrm{s}}\frac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2}{\omega(\omega+\omega_{\mathrm{cs}})}\right)\left(1-\sum_{\mathrm{s}}\frac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2}{\omega(\omega-\omega_{\mathrm{cs}})}\right) && (4.292)
\end{aligned}
$$

$$
SP=\left(1-\sum_{\mathrm{s}}\frac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2}{\omega^2-{\omega_{\mathrm{cs}}}^2}\right)\left(1-\sum_{\mathrm{s}}\frac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2}{\omega^2}\right) \tag{4.293}
$$

$$
\begin{aligned}
&\nabla^2\boldsymbol{E}-\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}-\mu_0\sum_s\frac{\partial\boldsymbol{J}_s}{\partial t} && (4.294)\\
=&\varepsilon_0\mu_0\omega^2\begin{pmatrix} P\sin^2\theta+S\cos^2\theta-N^2 & -iD\cos\theta & (P-S)\cos\theta\sin\theta\\ iD\cos\theta & S-N^2 & -iD\sin\theta\\ (P-S)\cos\theta\sin\theta & iD\sin\theta & P\cos^2\theta+S\sin^2\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_X\\E_Y\\E_Z\end{pmatrix} && (4.295)\\
\cong&\varepsilon_0\mu_0\omega^2\begin{pmatrix}\sin^2\theta+\cos^2\theta-N^2 & 0 & 0\\ 0 & 1-N^2 & 0\\ 0 & 0 & \cos^2\theta+\sin^2\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_X\\E_Y\\E_Z\end{pmatrix} && (4.296)\\
=&\varepsilon_0\mu_0\omega^2\begin{pmatrix}1-N^2 & 0 & 0\\ 0 & 1-N^2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_X\\E_Y\\E_Z\end{pmatrix} && (4.297)\\
=&\boldsymbol{0} && (4.298)
\end{aligned}
$$

波である条件から

$$
(1-N^2)^2=0 \tag{4.299}
$$

したがって、

$$
N=\pm 1 \tag{4.300}
$$

4.11 周波数が非常に小さい場合

4.11.1 外部磁場がない場合

外部磁場がない場合は、

$$N^2 = 1 - \sum_{\mathrm{s}} \frac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2}{\omega^2} \tag{4.301}$$

$$= \frac{\omega^2 - \sum_{\mathrm{s}} {\omega_{\mathrm{ps}}}^2}{\omega^2} \tag{4.302}$$

$$\cong - \sum_{\mathrm{s}} \frac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2}{\omega^2} \tag{4.303}$$

したがって、

$$k^2 = \frac{N^2 \omega^2}{c^2} \tag{4.304}$$

$$\cong - \sum_{\mathrm{s}} \frac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2}{c^2} \tag{4.305}$$

すなわち、周波数が小さい場合は波数が一定値になる。

第5章　アルベン波について

移動度テンソル $\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{s}}(\omega)$ は、

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{s}}(\omega)=\frac{\varepsilon_0\omega}{q_s n_{s0}}\begin{pmatrix} i\frac{{\omega_{ps}}^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2\sin^2\theta)}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)} & -\frac{{\omega_{ps}}^2\omega\omega_{cs}\cos\theta}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)} & -i\frac{{\omega_{ps}}^2{\omega_{cs}}^2\sin\theta\cos\theta}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)} \\ \frac{{\omega_{ps}}^2\omega\omega_{cs}\cos\theta}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)} & i\frac{{\omega_{ps}}^2\omega^2}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)} & -\frac{{\omega_{ps}}^2\omega\omega_{cs}\sin\theta}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)} \\ -i\frac{{\omega_{ps}}^2{\omega_{cs}}^2\cos\theta\sin\theta}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)} & \frac{{\omega_{ps}}^2\omega\omega_{cs}\sin\theta}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)} & i\frac{{\omega_{ps}}^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2\cos^2\theta)}{\omega^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2)} \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

と表されるが、$|\omega| >> |\omega_{\mathrm{ps}}|, |\omega_{\mathrm{cs}}|$ のときは、

$$\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{s}}(\omega)=\frac{\varepsilon_0\omega}{q_s n_{s0}}\begin{pmatrix} i\frac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2}{\omega^2} & -\frac{{\omega_{ps}}^2\omega_{cs}\cos\theta}{\omega^3} & -i\frac{{\omega_{ps}}^2{\omega_{cs}}^2\sin\theta\cos\theta}{\omega^4} \\ \frac{{\omega_{ps}}^2\omega_{cs}\cos\theta}{\omega^3} & i\frac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2}{\omega^2} & -\frac{{\omega_{ps}}^2\omega_{cs}\sin\theta}{\omega^3} \\ -i\frac{{\omega_{ps}}^2{\omega_{cs}}^2\cos\theta\sin\theta}{\omega^4} & \frac{{\omega_{ps}}^2\omega_{cs}\sin\theta}{\omega^3} & i\frac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2}{\omega^2} \end{pmatrix} \tag{5.2}$$

したがって、

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},t) =&\boldsymbol{\mu}_{\mathrm{s}}\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\\ =&\frac{\varepsilon_0\omega}{q_s n_{s0}}\begin{pmatrix} i\frac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2}{\omega^2}E_X(\boldsymbol{r},t)-\frac{{\omega_{ps}}^2\omega_{cs}\cos\theta}{\omega^3}E_Y(\boldsymbol{r},t)-i\frac{{\omega_{ps}}^2{\omega_{cs}}^2\sin\theta\cos\theta}{\omega^4}E_Z(\boldsymbol{r},t) \\ \frac{{\omega_{ps}}^2\omega_{cs}\cos\theta}{\omega^3}E_X(\boldsymbol{r},t)+i\frac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2}{\omega^2}E_Y(\boldsymbol{r},t)-\frac{{\omega_{ps}}^2\omega_{cs}\sin\theta}{\omega^3}E_Z(\boldsymbol{r},t) \\ -i\frac{{\omega_{ps}}^2{\omega_{cs}}^2\cos\theta\sin\theta}{\omega^4}E_X(\boldsymbol{r},t)+\frac{{\omega_{ps}}^2\omega_{cs}\sin\theta}{\omega^3}E_Y(\boldsymbol{r},t)+i\frac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2}{\omega^2}E_Z(\boldsymbol{r},t)\end{pmatrix}\\ \cong&\frac{\varepsilon_0\omega}{q_s n_{s0}}\begin{pmatrix} i\frac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2}{\omega^2}E_X(\boldsymbol{r},t) \\ i\frac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2}{\omega^2}E_Y(\boldsymbol{r},t) \\ i\frac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2}{\omega^2}E_Z(\boldsymbol{r},t)\end{pmatrix}\\ =&\frac{\varepsilon_0\omega}{q_{\mathrm{s}} n_{\mathrm{s}0}}i\frac{{\omega_{\mathrm{ps}}}^2}{\omega^2}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\\ =&i\frac{q_{\mathrm{s}}}{m_{\mathrm{s}}\omega}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)\end{aligned}$$

これは、運動方程式、

$$m_{\mathrm{s}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}(\boldsymbol{r},t)}{\mathrm{d}t}=q_{\mathrm{s}}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) \tag{5.3}$$

の解。

逆に、$|\omega| << |\omega_{\rm ps}|, |\omega_{\rm cs}|$ のときは、

$$\boldsymbol{\mu}_{\rm s}(\omega) = \frac{\varepsilon_0\omega}{q_s n_{s0}} \begin{pmatrix} i\frac{{\omega_{ps}}^2(\omega^2-{\omega_{cs}}^2\sin^2\theta)}{\omega^2(-{\omega_{cs}}^2)} & -\frac{{\omega_{ps}}^2\omega\omega_{cs}\cos\theta}{\omega^2(-{\omega_{cs}}^2)} & -i\frac{{\omega_{ps}}^2{\omega_{cs}}^2\sin\theta\cos\theta}{\omega^2(-{\omega_{cs}}^2)} \\ \frac{{\omega_{ps}}^2\omega\omega_{cs}\cos\theta}{\omega^2(-{\omega_{cs}}^2)} & i\frac{{\omega_{ps}}^2\omega^2}{\omega^2(-{\omega_{cs}}^2)} & -\frac{{\omega_{ps}}^2\omega\omega_{cs}\sin\theta}{\omega^2(-{\omega_{cs}}^2)} \\ -i\frac{{\omega_{ps}}^2{\omega_{cs}}^2\cos\theta\sin\theta}{\omega^2(-{\omega_{cs}}^2)} & \frac{{\omega_{ps}}^2\omega\omega_{cs}\sin\theta}{\omega^2(-{\omega_{cs}}^2)} & i\frac{{\omega_{ps}}^2(-{\omega_{cs}}^2\cos^2\theta)}{\omega^2(-{\omega_{cs}}^2)} \end{pmatrix} \tag{5.4}$$

であるため、θ の値に応じて結果が異なってくる。

$\cos\theta, \sin\theta$ が、0 に近くない場合、

$$\boldsymbol{\mu}_{\rm s}(\omega) = \frac{\varepsilon_0\omega}{q_s n_{s0}} \begin{pmatrix} i\frac{{\omega_{ps}}^2(-{\omega_{cs}}^2\sin^2\theta)}{\omega^2(-{\omega_{cs}}^2)} & -\frac{{\omega_{ps}}^2\omega\omega_{cs}\cos\theta}{\omega^2(-{\omega_{cs}}^2)} & -i\frac{{\omega_{ps}}^2{\omega_{cs}}^2\sin\theta\cos\theta}{\omega^2(-{\omega_{cs}}^2)} \\ \frac{{\omega_{ps}}^2\omega\omega_{cs}\cos\theta}{\omega^2(-{\omega_{cs}}^2)} & i\frac{{\omega_{ps}}^2\omega^2}{\omega^2(-{\omega_{cs}}^2)} & -\frac{{\omega_{ps}}^2\omega\omega_{cs}\sin\theta}{\omega^2(-{\omega_{cs}}^2)} \\ -i\frac{{\omega_{ps}}^2{\omega_{cs}}^2\cos\theta\sin\theta}{\omega^2(-{\omega_{cs}}^2)} & \frac{{\omega_{ps}}^2\omega\omega_{cs}\sin\theta}{\omega^2(-{\omega_{cs}}^2)} & i\frac{{\omega_{ps}}^2(-{\omega_{cs}}^2\cos^2\theta)}{\omega^2(-{\omega_{cs}}^2)} \end{pmatrix} \tag{5.5}$$

$$\boldsymbol{\mu}_{\rm s}(\omega) = \frac{\varepsilon_0\omega}{q_s n_{s0}} \begin{pmatrix} i\frac{{\omega_{\rm ps}}^2\sin^2\theta}{\omega^2} & \frac{{\omega_{\rm ps}}^2\cos\theta}{\omega\omega_{\rm cs}} & i\frac{{\omega_{\rm ps}}^2\sin\theta\cos\theta}{\omega^2} \\ -\frac{{\omega_{\rm ps}}^2\cos\theta}{\omega\omega_{\rm cs}} & -i\frac{{\omega_{\rm ps}}^2}{{\omega_{\rm cs}}^2} & \frac{{\omega_{\rm ps}}^2\sin\theta}{\omega\omega_{\rm cs}} \\ i\frac{{\omega_{\rm ps}}^2\cos\theta\sin\theta}{\omega^2} & -\frac{{\omega_{\rm ps}}^2\sin\theta}{\omega\omega_{\rm cs}} & i\frac{{\omega_{ps}}^2\cos^2\theta}{\omega^2} \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

5.1 $\theta = 0$ 又は π のときの波動

$\theta = 0$ 又は π のときは、波動方程式にとりあえず $\sin\theta = 0$, $\cos^2\theta = 1$ を代入し、

$$\epsilon_0\mu_0\omega^2 \begin{pmatrix} S-N^2 & -iD\cos\theta & 0 \\ iD\cos\theta & S-N^2 & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{5.7}$$

解が存在するための条件は、

$$(S-N^2)^2P - (-iD\cos\theta)(iD\cos\theta)P = 0 \tag{5.8}$$

$$P\{(S-N^2)^2 - D^2\} = 0 \tag{5.9}$$

したがって、解は $P = 0$、$N^2 = S \pm D$。

$P = 0$ の場合は、

$$\epsilon_0\mu_0\omega^2 \begin{pmatrix} S-N^2 & -iD\cos\theta & 0 \\ iD\cos\theta & S-N^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{5.10}$$

$(S-N^2)^2 - (-iD)iD = (S-N^2)^2 - D^2 = 0$ の場合を除き、$E_X = E_Y = 0$。E_Z は自由な値を取ることができる。$(S-N^2)^2 - D^2 = 0$ の場合は、$N^2 = S \pm D$ の場合を検討すればよい。

$N^2 = S \pm D$ の場合は、

$$\epsilon_0\mu_0\omega^2 \begin{pmatrix} \mp D & -iD\cos\theta & 0 \\ iD\cos\theta & \mp D & 0 \\ 0 & 0 & P \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{5.11}$$

$$\mp DE_X - iD\cos\theta E_Y = 0 \tag{5.12}$$

$D \neq 0$ の条件において、

$$\mp E_X - i\cos\theta E_Y = 0 \tag{5.13}$$

$$\mp E_X = i\cos\theta E_Y \tag{5.14}$$

$$E_X : E_Y = i\cos\theta : (\mp 1) \tag{5.15}$$

すなわち、$D = 0$ の場合を除き、$E_X : E_Y = i\cos\theta : (\mp 1)$、$P = 0$ の場合を除き $E_Z = 0$。

$D = 0$ の場合は、E_X、E_Y ともに自由な値を取ることができる。$P = 0$ の場合、E_Z は自由な値を取ることができる。

まとめると、

$N^2 = S + D$	$E_X : E_Y = i\cos\theta : (-1),\ E_Z = 0$	横波
$N^2 = S - D$	$E_X : E_Y = i\cos\theta : 1,\ E_Z = 0$	横波
$N^2 = S \pm D,\ D = 0$	$E_X,\ E_Y$ は任意。 $E_Z = 0$	横波
$N^2 = S \pm D,\ P = 0$	$E_X : E_Y = i\cos\theta : (-1),\ E_Z$ は任意。	ハイブリッド波
$P = 0$	$E_X = E_Y = 0\ E_Z$ は任意。	縦波

5.1.1 $S \pm D$ について

$$S \pm D = \left(1 - \sum_s \frac{{\omega_{ps}}^2}{\omega^2 - {\omega_{cs}}^2}\right) \pm \left(\sum_s \frac{\omega_{cs}{\omega_{ps}}^2}{\omega(\omega^2 - {\omega_{cs}}^2)}\right) \tag{5.16}$$

$$= \left(1 - \sum_s \frac{\omega{\omega_{ps}}^2}{\omega(\omega^2 - {\omega_{cs}}^2)}\right) \pm \left(\sum_s \frac{\omega_{cs}{\omega_{ps}}^2}{\omega(\omega^2 - {\omega_{cs}}^2)}\right) \tag{5.17}$$

$$= 1 - \sum_s \frac{\omega{\omega_{ps}}^2 \mp \omega_{cs}{\omega_{ps}}^2}{\omega(\omega^2 - {\omega_{cs}}^2)} \tag{5.18}$$

$$= 1 - \sum_s \frac{{\omega_{ps}}^2(\omega \mp \omega_{cs})}{\omega(\omega + \omega_{cs})(\omega - \omega_{cs})} \tag{5.19}$$

$$= 1 - \sum_s \frac{{\omega_{ps}}^2}{\omega(\omega \pm \omega_{cs})} \tag{5.20}$$

特に、電子と１成分のイオンからなる中性プラズマの場合は、

$$
\begin{aligned}
S \pm D &= 1 - \frac{{\omega_{pe}}^2}{\omega(\omega \pm \omega_{ce})} - \frac{{\omega_{pi}}^2}{\omega(\omega \pm \omega_{ci})} && (5.21)\\
&= 1 - \frac{{\omega_{pe}}^2(\omega \pm \omega_{ci})}{\omega(\omega \pm \omega_{ce})(\omega \pm \omega_{ci})} - \frac{{\omega_{pi}}^2(\omega \pm \omega_{ce})}{\omega(\omega \pm \omega_{ce})(\omega \pm \omega_{ci})} && (5.22)\\
&= 1 - \frac{{\omega_{pe}}^2(\omega \pm \omega_{ci}) + {\omega_{pi}}^2(\omega \pm \omega_{ce})}{\omega(\omega \pm \omega_{ce})(\omega \pm \omega_{ci})} && (5.23)\\
&= 1 - \frac{\omega({\omega_{pe}}^2 + {\omega_{pi}}^2) \pm ({\omega_{pe}}^2\omega_{ci} + {\omega_{pi}}^2\omega_{ce})}{\omega(\omega \pm \omega_{ce})(\omega \pm \omega_{ci})} && (5.24)\\
&= 1 - \frac{\omega({\omega_{pe}}^2 + {\omega_{pi}}^2) \pm (\frac{{q_e}^2 n_e}{\varepsilon_0 m_e}\frac{q_i B_0}{m_i} + \frac{{q_i}^2 n_i}{\varepsilon_0 m_i}\frac{q_e B_0}{m_e})}{\omega(\omega \pm \omega_{ce})(\omega \pm \omega_{ci})} && (5.25)\\
&= 1 - \frac{\omega({\omega_{pe}}^2 + {\omega_{pi}}^2) \pm \frac{q_e q_i B_0}{\varepsilon_0 m_e m_i}(q_e n_e + q_i n_i)}{\omega(\omega \pm \omega_{ce})(\omega \pm \omega_{ci})} && (5.26)\\
&= 1 - \frac{\omega({\omega_{pe}}^2 + {\omega_{pi}}^2)}{\omega(\omega \pm \omega_{ce})(\omega \pm \omega_{ci})} && (5.27)\\
&= 1 - \frac{{\omega_{pe}}^2 + {\omega_{pi}}^2}{(\omega \pm \omega_{ce})(\omega \pm \omega_{ci})} && (5.28)\\
& && (5.29)
\end{aligned}
$$

5.1.2 アルベン領域について

周波数が非常に小さいアルベン波領域では、

$$
\begin{aligned}
S \pm D &= 1 - \frac{{\omega_{pe}}^2 + {\omega_{pi}}^2}{(\omega \pm \omega_{ce})(\omega \pm \omega_{ci})} && (5.30)\\
&\simeq 1 - \frac{{\omega_{pe}}^2 + {\omega_{pi}}^2}{\omega_{ce}\omega_{ci}} && (5.31)\\
&\simeq 1 - \frac{{\omega_{pe}}^2}{\omega_{ce}\omega_{ci}} && (5.32)
\end{aligned}
$$

密度が非常に大きいとき、

$$
\begin{aligned}
S \pm D &\simeq -\frac{{\omega_{pe}}^2}{\omega_{ce}\omega_{ci}}\\
&= -\frac{{q_e}^2 n_e}{\varepsilon_0 m_e}\frac{m_e}{q_e B_0}\frac{m_i}{q_i B_0}\\
&= -\frac{q_e n_e}{\varepsilon_0}\frac{1}{B_0}\frac{m_i}{q_i B_0}\\
&= \frac{q_i n_i}{\varepsilon_0}\frac{1}{B_0}\frac{m_i}{q_i B_0}\\
&= \frac{n_i m_i}{\varepsilon_0 {B_0}^2} && (5.33)
\end{aligned}
$$

$N^2 = S \pm D$ に当てはめると、

$$\frac{k^2c^2}{\omega^2} \simeq \frac{n_i m_i}{\varepsilon_0 {B_0}^2} \tag{5.34}$$

$$\frac{\omega^2}{k^2} \simeq \frac{\varepsilon_0 {B_0}^2}{n_i m_i} c^2 \tag{5.35}$$

$$= \frac{{B_0}^2}{\mu_0 n_i m_i} \tag{5.36}$$

5.2 $\theta = \pm\pi/2$ のときの波動

波動方程式には、とりあえず $\cos\theta = 0$, $\sin^2\theta = 1$ を代入して、

$$\begin{pmatrix} P - N^2 & 0 & 0 \\ 0 & S - N^2 & -iD\sin\theta \\ 0 & iD\sin\theta & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{5.37}$$

解が存在するための条件は、

$$(P - N^2)(S - N^2)S - (P - N^2)(-iD\sin\theta)(iD\sin\theta) = 0 \tag{5.38}$$

$$(P - N^2)\{(S - N^2)S - D^2\} = 0 \tag{5.39}$$

$$\tag{5.40}$$

から、解は $N^2 = P$ と $(S - N^2)S - D^2 = 0$。

$S \neq 0$ ならば、$(S - N^2)S - D^2 = 0$ の解は、

$$N^2 = \frac{S^2 - D^2}{S} \tag{5.41}$$

$S = 0$ の場合の解は、$D = 0$。しかし、$D = 0$ と $S = 0$ とが同時に成り立つとは考えにくい。

5.2.0.0.0.1 $N^2 = P$ の場合は、

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & S - P & -iD\sin\theta \\ 0 & iD\sin\theta & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{5.42}$$

$(S - P)S - (-iD\sin\theta)(iD\sin\theta) = (S - P)S - D^2 \neq 0$ の条件において、$E_Y = E_Z = 0$。E_X は自由な値を取ることができる。

$(S - P)S - D^2 = 0$ である場合は、$S - P = D^2/S$（ただし $S \neq 0$）として、

$$D^2/S \cdot E_Y - iD\sin\theta E_Z = 0 \tag{5.43}$$

$$D^2/S \cdot E_Y = iD\sin\theta E_Z \tag{5.44}$$

$$E_Y : E_Z = iD\sin\theta : D^2/S \tag{5.45}$$

$$E_Y : E_Z = iS\sin\theta : D \tag{5.46}$$

$(S-P)S-D^2=0$ かつ $S=0$ である場合は、$D=0$ となるから、

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{5.47}$$

したがって、$E_Y=0$、E_Z は自由な値を取ることができる。

5.2.0.0.0.2 $N^2=\frac{S^2-D^2}{S}$, $S\neq 0$ の場合は、

$$\begin{pmatrix} P-\frac{S^2-D^2}{S} & 0 & 0 \\ 0 & S-\frac{S^2-D^2}{S} & -iD\sin\theta \\ 0 & iD\sin\theta & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P-\frac{S^2-D^2}{S} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{D^2}{S} & -iD\sin\theta \\ 0 & iD\sin\theta & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{5.48}$$

$E_Y(iD\sin\theta)+E_ZS=0$ を変形して、$E_Y(iD\sin\theta)=-E_ZS$。したがって、$P-\frac{S^2-D^2}{S}=0$ の場合を除いて、$E_X=0$、$E_Y:E_Z=(-S):iD\sin\theta$。

$N^2=\frac{S^2-D^2}{S}$, $S\neq 0$, $P-\frac{S^2-D^2}{S}=0$ の場合は、

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{D^2}{S} & -iD\sin\theta \\ 0 & iD\sin\theta & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{5.49}$$

つまり、E_X は自由な値を取ることができる。一方、$E_Y(iD\sin\theta)=-E_ZS$。なお、$P-\frac{S^2-D^2}{S}=0$ は、$N^2=P$ である。

5.2.0.0.0.3 $S=0$, $D=0$ の場合は、

$$\begin{pmatrix} P-N^2 & 0 & 0 \\ 0 & -N^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \\ E_Z \end{pmatrix} = \mathbf{0} \tag{5.50}$$

$P-N^2=0$ の場合を除き、$E_X=0$。$N^2=0$ の場合を除き $E_Y=0$。E_Z は自由な値を取ることができる。$P-N^2=0$ の場合は E_X は自由な値を取ることができる。$N^2=0$ の場合は、E_Y は自由な値を取ることができる。

5.2.0.0.0.4 まとめると、

$N^2=P$	E_X は任意。$E_Y=E_Z=0$	横波
$N^2=P$, $(S-P)S-D^2=0$	E_X は任意。$E_Y:E_Z=iS\sin\theta:D$	ハイブリッド波
$N^2=P$, $(S-P)S-D^2=0$, $S=0$	E_X は任意。$E_Y=0$、E_Z は任意。	ハイブリッド波
$N^2=\frac{S^2-D^2}{S}$	$E_X=0$, $E_Y:E_Z=(-S):iD\sin\theta$	ハイブリッド波
$N^2=\frac{S^2-D^2}{S}$, $N^2=P$	E_X は任意。 $E_Y:E_Z=(-S):iD\sin\theta$	ハイブリッド波
$S=0$, $D=0$	$E_X=E_Y=0$, E_Z は任意。	縦波
$S=0$, $D=0$, $N^2=P$	E_X は任意。$E_Y=0$, E_Z は任意。	ハイブリッド波
$S=0$, $D=0$, $N^2=0$	$E_X=0$,E_Y は任意, E_Z は任意。	ハイブリッド波

5.2.1 アルベン波領域について

周波数が非常に小さいときの X 波を考える。

$$S = 1 - \sum_s \frac{{\omega_{ps}}^2}{\omega^2 - {\omega_{cs}}^2} \tag{5.51}$$

$$\simeq 1 + \sum_s \frac{{\omega_{ps}}^2}{{\omega_{cs}}^2} \tag{5.52}$$

$$= 1 + \sum_s \frac{{q_s}^2 n_s}{\varepsilon_0 m_s} \frac{{m_s}^2}{{q_s}^2 {B_0}^2} \tag{5.53}$$

$$= 1 + \sum_s \frac{n_s m_s}{\varepsilon_0 {B_0}^2} \tag{5.54}$$

プラズマが電子と 1 成分のイオンのみからなるとすると、

$$S \simeq 1 + \sum_s \frac{n_s m_s}{\varepsilon_0 {B_0}^2} \tag{5.55}$$

$$\simeq 1 + \frac{n_i m_i}{\varepsilon_0 {B_0}^2} \tag{5.56}$$

密度が十分に大きい場合、

$$S \simeq \frac{n_i m_i}{\varepsilon_0 {B_0}^2} \tag{5.57}$$

(5.33) 式も用いて、

$$\frac{S^2 - D^2}{S} = \frac{n_i m_i}{\varepsilon_0 {B_0}^2} \tag{5.58}$$

したがって、X 波において周波数が非常に低い場合はアルベン波となる。

第6章　異なる媒質を伝搬する波について

6.1　プラズマにおける境界条件

プラズマ中における積分型のマックスウェル方程式は、

$$\oint_C \boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = -\int_C \frac{\partial \boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{6.1}$$

$$\oint_C \boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_C \mu_0 \boldsymbol{J}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} + \int_C \mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} \tag{6.2}$$

$$\oint_S \boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = -\frac{1}{\varepsilon_0}\int\oint_S \boldsymbol{J}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}\mathrm{d}t \tag{6.3}$$

$$\oint_S \boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = 0 \tag{6.4}$$

6.1.1　入射波、反射波、透過波の関係を求める。

$z = z_0$ の平面に媒質の境界があるとし、y 軸に垂直な平面に入射面が存在するとする。入射角、反射角、屈折角をそれぞれ θ_{i}、θ_{r}、θ_{t} とする。

入射波の波動は、$\boldsymbol{k}_i\cdot\boldsymbol{r} = (k_i\sin\theta_i\hat{\boldsymbol{x}} + k_i\cos\theta_i\hat{\boldsymbol{z}})\cdot(x\hat{\boldsymbol{x}} + y\hat{\boldsymbol{y}} + z\hat{\boldsymbol{z}})$ であること（後述の図参照）に注意して、

$$\boldsymbol{E}_i = \begin{pmatrix} E_{xi} \\ E_{yi} \\ E_{zi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{x0i}\exp(ik_i\cos\theta_i z + ik_i\sin\theta_i x - i\omega t) \\ E_{y0i}\exp(ik_i\cos\theta_i z + ik_i\sin\theta_i x - i\omega t) \\ E_{z0i}\exp(ik_i\cos\theta_i z + ik_i\sin\theta_i x - i\omega t) \end{pmatrix} \tag{6.5}$$

である。

反射波の波動は、$\boldsymbol{k}_i = k_r\sin\theta_r\hat{\boldsymbol{x}} - k_r\cos\theta_r\hat{\boldsymbol{z}}$ であることに注意して、

$$\boldsymbol{E}_r = \begin{pmatrix} E_{xr} \\ E_{yr} \\ E_{zr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{x0r}\exp(-ik_r\cos\theta_r z + ik_r\sin\theta_r x - i\omega t) \\ E_{y0r}\exp(-ik_r\cos\theta_r z + ik_r\sin\theta_r x - i\omega t) \\ E_{z0r}\exp(-ik_r\cos\theta_r z + ik_r\sin\theta_r x - i\omega t) \end{pmatrix} \tag{6.6}$$

とする。

透過波の波動は、$\boldsymbol{k}_t = k_t\sin\theta_t\hat{\boldsymbol{x}} + k_t\cos\theta_t\hat{\boldsymbol{z}}$ であることに注意して、

$$\boldsymbol{E}_t = \begin{pmatrix} E_{xt} \\ E_{yt} \\ E_{zt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{x0t}\exp(ik_t\cos\theta_t z + ik_t\sin\theta_t x - i\omega t) \\ E_{y0t}\exp(ik_t\cos\theta_t z + ik_t\sin\theta_t x - i\omega t) \\ E_{z0t}\exp(ik_t\cos\theta_t z + ik_t\sin\theta_t x - i\omega t) \end{pmatrix} \tag{6.7}$$

とする。

磁場についても同様。

$$\boldsymbol{B}_i = \begin{pmatrix} B_{xi} \\ B_{yi} \\ B_{zi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{x0i}\exp(ik_i\cos\theta_i z + ik_i\sin\theta_i x - i\omega t) \\ B_{y0i}\exp(ik_i\cos\theta_i z + ik_i\sin\theta_i x - i\omega t) \\ B_{z0i}\exp(ik_i\cos\theta_i z + ik_i\sin\theta_i x - i\omega t) \end{pmatrix} \tag{6.8}$$

$$\boldsymbol{B}_r = \begin{pmatrix} B_{xr} \\ B_{yr} \\ B_{zr} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{x0r}\exp(-ik_r\cos\theta_r z + ik_r\sin\theta_r x - i\omega t) \\ B_{y0r}\exp(-ik_r\cos\theta_r z + ik_r\sin\theta_r x - i\omega t) \\ B_{z0r}\exp(-ik_r\cos\theta_r z + ik_r\sin\theta_r x - i\omega t) \end{pmatrix} \tag{6.9}$$

$$\boldsymbol{B}_t = \begin{pmatrix} B_{xt} \\ B_{yt} \\ B_{zt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B_{x0t}\exp(ik_t\cos\theta_t z + ik_t\sin\theta_t x - i\omega t) \\ B_{y0t}\exp(ik_t\cos\theta_t z + ik_t\sin\theta_t x - i\omega t) \\ B_{z0t}\exp(ik_t\cos\theta_t z + ik_t\sin\theta_t x - i\omega t) \end{pmatrix} \tag{6.10}$$

6.1.1.0.1 ファラデー-マクスウェルの式について $A\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0 - \frac{\Delta z}{2}\right)$, $B\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0 + \frac{\Delta z}{2}\right)$, $C\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, 0, z_0 + \frac{\Delta z}{2}\right)$, $D\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z_0 - \frac{\Delta z}{2}\right)$ とし、$A \to B \to C \to D \to A$ の順の積分路を考える。

$$\oint_C \boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t) \cdot d\boldsymbol{l} = -\int_C \frac{\partial \boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{6.11}$$

$$\tag{6.12}$$

左辺は、

$$\oint_C \boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t) \cdot d\boldsymbol{l} \tag{6.13}$$

$$= \int_{A\to B} \boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t) \cdot d\boldsymbol{l} + \int_{B\to C} \boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t) \cdot d\boldsymbol{l} + \int_{C\to D} \boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t) \cdot d\boldsymbol{l} + \int_{D\to A} \boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t) \cdot d\boldsymbol{l} \tag{6.14}$$

$$= \int_{z_0 - \frac{\Delta z}{2}}^{z_0 + \frac{\Delta z}{2}} E_{\mathrm{g}z}\left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0, z, t\right) \mathrm{d}z + \int_{x_0 - \frac{\Delta x}{2}}^{x_0 + \frac{\Delta x}{2}} E_{\mathrm{g}x}\left(x, y_0, z_0 + \frac{\Delta z}{2}, t\right) \mathrm{d}x \tag{6.15}$$

$$+ \int_{z_0 + \frac{\Delta z}{2}}^{z_0 - \frac{\Delta z}{2}} E_{\mathrm{g}z}\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0, z, t\right) \mathrm{d}z + \int_{x_0 + \frac{\Delta x}{2}}^{x_0 - \frac{\Delta x}{2}} E_{\mathrm{g}x}\left(x, y_0, z_0 - \frac{\Delta z}{2}, t\right) \mathrm{d}x \tag{6.16}$$

$\Delta z \to 0$ の極限を取ると、

$$\oint_C \boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t) \cdot d\boldsymbol{l} = \int_{x_0 - \frac{\Delta x}{2}}^{x_0 + \frac{\Delta x}{2}} E_{\mathrm{g}x}\left(x, y_0, z_0 + 0, t\right) \mathrm{d}x + \int_{x_0 + \frac{\Delta x}{2}}^{x_0 - \frac{\Delta x}{2}} E_{\mathrm{g}x}\left(x, y_0, z_0 - 0, t\right) \mathrm{d}x \tag{6.17}$$

Δx を十分に小さい値に取ると、

$$\oint_C \boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t) \cdot d\boldsymbol{l} = E_{\mathrm{g}x}\left(x_0, y_0, z_0 + 0, t\right) \Delta x - E_{\mathrm{g}x}\left(x_0, y_0, z_0 - 0, t\right) \Delta x \tag{6.18}$$

右辺は、

$$-\iint_C \frac{\partial \boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{S} \tag{6.19}$$

$$= -\iint \frac{\partial B_{\mathrm{g}y}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} \mathrm{d}x\mathrm{d}z \tag{6.20}$$

$$= -\int_{z_0 - \frac{\Delta z}{2}}^{0} \int_{x_0 - \frac{\Delta x}{2}}^{x_0 + \frac{\Delta x}{2}} \frac{\partial B_{\mathrm{g}y}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} \mathrm{d}x\mathrm{d}z - \int_{0}^{z_0 + \frac{\Delta z}{2}} \int_{x_0 - \frac{\Delta x}{2}}^{x_0 + \frac{\Delta x}{2}} \frac{\partial B_{\mathrm{g}y}(\boldsymbol{r}, t)}{\partial t} \mathrm{d}x\mathrm{d}z \tag{6.21}$$

$\Delta z \to 0$ の極限を取ると、

$$-\iint_C \frac{\partial \boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t} \cdot d\boldsymbol{S} = 0 \tag{6.22}$$

したがって、

$$\boxed{E_{\mathrm{g}x}\left(x_0, y_0, z_0+0, t\right) - E_{\mathrm{g}x}\left(x_0, y_0, z_0-0, t\right) = 0} \tag{6.23}$$

波動に適用すると、

$$E_{x0t}\exp\left(ik_t\cos\theta_t z_0 + ik_t\sin\theta_t x_0 - i\omega t\right) \tag{6.24}$$

$$-E_{x0i}\exp\left(ik_i\cos\theta_i z_0 + ik_i\sin\theta_i x_0 - i\omega t\right) \tag{6.25}$$

$$-E_{x0r}\exp\left(-ik_r\cos\theta_r z_0 + ik_r\sin\theta_r x_0 - i\omega t\right) \tag{6.26}$$

$$=0 \tag{6.27}$$

任意の x_0 で成立するためには、

$$\boxed{k_t\sin\theta_t = k_i\sin\theta_i = k_r\sin\theta_r} \tag{6.28}$$

であることが必要。これを踏まえると、

$$E_{x0t}\exp\left(ik_t\cos\theta_t z_0\right) = E_{x0i}\exp\left(ik_i\cos\theta_i z_0\right) + E_{x0r}\exp\left(-ik_r\cos\theta_r z_0\right) \tag{6.29}$$

特に、$z_0 = 0$ の場合は、

$$E_{x0t} = E_{x0i} + E_{x0r} \tag{6.30}$$

次に、$A\left(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0 - \frac{\Delta z}{2}\right)$, $B\left(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z_0 + \frac{\Delta z}{2}\right)$, $C\left(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0 + \frac{\Delta z}{2}\right)$, $D\left(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z_0 - \frac{\Delta z}{2}\right)$ とし、$A \to B \to C \to D \to A$ の順の積分路を考える。左辺は、

$$\oint_C \boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{l} \tag{6.31}$$

$$= \int_{A\to B}\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{l} + \int_{B\to C}\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{l} + \int_{C\to D}\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{l} + \int_{D\to A}\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{l} \tag{6.32}$$

$$= \int_{z_0-\frac{\Delta z}{2}}^{z_0+\frac{\Delta z}{2}} E_{\mathrm{g}z}\left(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2}, z, t\right)\mathrm{d}z + \int_{y_0-\frac{\Delta y}{2}}^{y_0+\frac{\Delta y}{2}} E_{\mathrm{g}y}\left(x_0, y, z_0 + \frac{\Delta z}{2}, t\right)\mathrm{d}y \tag{6.33}$$

$$+ \int_{z_0+\frac{\Delta z}{2}}^{z_0-\frac{\Delta z}{2}} E_{\mathrm{g}z}\left(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2}, z, t\right)\mathrm{d}z + \int_{y_0+\frac{\Delta y}{2}}^{y_0-\frac{\Delta y}{2}} E_{\mathrm{g}y}\left(x_0, y, z_0 - \frac{\Delta z}{2}, t\right)\mathrm{d}y \tag{6.34}$$

$\Delta z \to 0$ の極限を取ると、

$$\oint_C \boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{l} = \int_{y_0-\frac{\Delta y}{2}}^{y_0+\frac{\Delta y}{2}} E_{\mathrm{g}y}\left(x_0, y, z_0+0, t\right)\mathrm{d}y + \int_{y_0+\frac{\Delta y}{2}}^{y_0-\frac{\Delta y}{2}} E_{\mathrm{g}y}\left(x_0, y, z_0-0, t\right)\mathrm{d}y \tag{6.35}$$

Δy を十分に小さい値に取ると、

$$\oint_C \boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{l} = E_{\mathrm{g}y}\left(x_0, y_0, z_0+0, t\right)\Delta y - E_{\mathrm{g}y}\left(x_0, y_0, z_0-0, t\right)\Delta y \tag{6.36}$$

右辺は $\Delta z \to 0$ でゼロとなるから、

$$\boxed{E_{\mathrm{g}y}\left(x_0, y_0, z_0+0, t\right) - E_{\mathrm{g}y}\left(x_0, y_0, z_0-0, t\right) = 0} \tag{6.37}$$

同様に波動に適用した場合、

$$
\begin{aligned}
&E_{y0t}\exp\left(ik_t\cos\theta_t z_0+ik_t\sin\theta_t x_0-i\omega t\right) &(6.38)\\
&-E_{y0i}\exp\left(ik_i\cos\theta_i z_0+ik_i\sin\theta_i x_0-i\omega t\right) &(6.39)\\
&-E_{y0r}\exp\left(-ik_r\cos\theta_r z_0+ik_r\sin\theta_r x_0-i\omega t\right) &(6.40)\\
&=0 &(6.41)
\end{aligned}
$$

(6.28) 式より、

$$E_{y0t}\exp(ik_t\cos\theta_t z_0)=E_{y0i}\exp(ik_i\cos\theta_i z_0)+E_{y0r}\exp(-ik_r\cos\theta_r z_0) \tag{6.42}$$

特に、$z_0=0$ の場合は、

$$E_{y0t}=E_{y0i}+E_{y0r} \tag{6.43}$$

6.1.1.0.2　アンペール-マクスウェルの式について　アンペール-マクスウェルの式、

$$\oint_C \boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{l}=\int_C \mu_0\boldsymbol{J}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{S}+\int_C \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S} \tag{6.44}$$

ついても、ファラデー-マックスウェルの式の場合と同様の計算をすれば、

$$\boxed{B_{\mathrm{g}x}\left(x_0,y_0,z_0+0,t\right)-B_{\mathrm{g}x}\left(x_0,y_0,z_0-0,t\right)=0} \tag{6.45}$$

$$\boxed{B_{\mathrm{g}y}\left(x_0,y_0,z_0+0,t\right)-B_{\mathrm{g}y}\left(x_0,y_0,z_0-0,t\right)=0} \tag{6.46}$$

波動に適用すると、

$$
\begin{aligned}
B_{x0t}\exp\left(ik_t\cos\theta_t z_0\right)&=B_{x0i}\exp\left(ik_i\cos\theta_i z_0\right)+B_{x0r}\exp\left(-ik_r\cos\theta_r z_0\right) &(6.47)\\
B_{y0t}\exp\left(ik_t\cos\theta_t z_0\right)&=B_{y0i}\exp\left(ik_i\cos\theta_i z_0\right)+B_{y0r}\exp\left(-ik_r\cos\theta_r z_0\right) &(6.48)
\end{aligned}
$$

が導かれる。特に、$z_0=0$ の場合は、

$$
\begin{aligned}
B_{x0t}&=B_{x0i}+B_{x0r} &(6.49)\\
B_{y0t}&=B_{y0i}+B_{y0r} &(6.50)
\end{aligned}
$$

6.1.1.0.3　マクスウェル-ガウスの式について　$A\left(x_0-\frac{\Delta x}{2},y_0-\frac{\Delta y}{2},z_0-\frac{\Delta z}{2}\right)$, $B\left(x_0+\frac{\Delta x}{2},y_0-\frac{\Delta y}{2},z_0-\frac{\Delta z}{2}\right)$, $C\left(x_0+\frac{\Delta x}{2},y_0+\frac{\Delta y}{2},z_0-\frac{\Delta z}{2}\right)$, $D\left(x_0-\frac{\Delta x}{2},y_0+\frac{\Delta y}{2},z_0-\frac{\Delta z}{2}\right)$, $E\left(x_0-\frac{\Delta x}{2},y_0-\frac{\Delta y}{2},z_0+\frac{\Delta z}{2}\right)$, $F\left(x_0+\frac{\Delta x}{2},y_0-\frac{\Delta y}{2},z_0\right.$ $G\left(x_0+\frac{\Delta x}{2},y_0+\frac{\Delta y}{2},z_0+\frac{\Delta z}{2}\right)$, $H\left(x_0-\frac{\Delta x}{2},y_0+\frac{\Delta y}{2},z_0+\frac{\Delta z}{2}\right)$ を頂点に持つ直方体について、マックスウェル-ガウスの式を適用する。

左辺については、

$$\oint_S \boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{S} \tag{6.51}$$

$$=\iint_{ABCD}\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{S}+\iint_{ADHE}\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{S}+\iint_{DHGC}\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{S} \tag{6.52}$$

$$+\iint_{CGFB}\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{S}+\iint_{BAEF}\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{S}+\iint_{EFGH}\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{S} \tag{6.53}$$

$$=\int_{x_0-\frac{\Delta x}{2}}^{x_0+\frac{\Delta x}{2}}\int_{y_0-\frac{\Delta y}{2}}^{y_0+\frac{\Delta y}{2}}-E_{\mathrm{g}z}\left(x,y,z_0-\frac{\Delta z}{2},t\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x+\int_{y_0-\frac{\Delta y}{2}}^{y_0+\frac{\Delta y}{2}}\int_{z_0-\frac{\Delta z}{2}}^{z_0+\frac{\Delta z}{2}}-E_{\mathrm{g}x}\left(x_0-\frac{\Delta x}{2},y,z,t\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \tag{6.54}$$

$$+\int_{z_0-\frac{\Delta z}{2}}^{z_0+\frac{\Delta z}{2}}\int_{x_0-\frac{\Delta x}{2}}^{x_0+\frac{\Delta x}{2}}E_{\mathrm{g}y}\left(x,y_0+\frac{\Delta y}{2},z,t\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z+\int_{y_0-\frac{\Delta y}{2}}^{y_0+\frac{\Delta y}{2}}\int_{z_0-\frac{\Delta z}{2}}^{z_0+\frac{\Delta z}{2}}E_{\mathrm{g}x}\left(x_0+\frac{\Delta x}{2},y,z,t\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}y \tag{6.55}$$

$$+\int_{z_0-\frac{\Delta z}{2}}^{z_0+\frac{\Delta z}{2}}\int_{x_0-\frac{\Delta x}{2}}^{x_0+\frac{\Delta x}{2}}-E_{\mathrm{g}y}\left(x,y_0-\frac{\Delta y}{2},z,t\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z+\int_{x_0-\frac{\Delta x}{2}}^{x_0+\frac{\Delta x}{2}}\int_{y_0-\frac{\Delta y}{2}}^{y_0+\frac{\Delta y}{2}}E_{\mathrm{g}z}\left(x,y,z_0+\frac{\Delta z}{2},t\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \tag{6.56}$$

$\Delta z\to 0$ の極限を取ると、

$$\oint_S \boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{S} \tag{6.57}$$

$$=\int_{x_0-\frac{\Delta x}{2}}^{x_0+\frac{\Delta x}{2}}\int_{y_0-\frac{\Delta y}{2}}^{y_0+\frac{\Delta y}{2}}-E_{\mathrm{g}z}\left(x,y,z_0-0,t\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x+\int_{x_0-\frac{\Delta x}{2}}^{x_0+\frac{\Delta x}{2}}\int_{y_0-\frac{\Delta y}{2}}^{y_0+\frac{\Delta y}{2}}E_{\mathrm{g}z}\left(x,y,z_0+0,t\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \tag{6.58}$$

Δx, Δy を十分小さい値とすれば、

$$\oint_S \boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{S}=-E_{\mathrm{g}z}\left(x_0,y_0,z_0-0,t\right)\Delta y\Delta x+E_{\mathrm{g}z}\left(x_0,y_0,z_0+0,t\right)\Delta y\Delta x \tag{6.59}$$

右辺は、

$$-\frac{1}{\varepsilon_0}\int\oint \boldsymbol{J}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\mathrm{d}t \tag{6.60}$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{ABCD}\boldsymbol{J}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\mathrm{d}t-\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{ADHE}\boldsymbol{J}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\mathrm{d}t-\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{DHGC}\boldsymbol{J}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\mathrm{d}t \tag{6.61}$$

$$-\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{CGFB}\boldsymbol{J}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\mathrm{d}t-\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{BAEF}\boldsymbol{J}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\mathrm{d}t-\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{EFGH}\boldsymbol{J}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\mathrm{d}t \tag{6.62}$$

となるが、左辺と同様の変形を経て、

$$-\frac{1}{\varepsilon_0}\int\oint \boldsymbol{J}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\mathrm{d}t \tag{6.63}$$

$$=-\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{ABCD}\boldsymbol{J}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\mathrm{d}t-\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{ADHE}\boldsymbol{J}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\mathrm{d}t-\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{DHGC}\boldsymbol{J}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\mathrm{d}t \tag{6.64}$$

$$-\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{CGFB}\boldsymbol{J}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\mathrm{d}t-\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{BAEF}\boldsymbol{J}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\mathrm{d}t-\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{EFGH}\boldsymbol{J}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}\mathrm{d}t \tag{6.65}$$

$$=\frac{1}{\varepsilon_0}\int J_{\mathrm{g}z}\left(x_0,y_0,z_0-0,t\right)\mathrm{d}t\Delta y\Delta x-\frac{1}{\varepsilon_0}\int J_{\mathrm{g}z}\left(x_0,y_0,z_0+0,t\right)\mathrm{d}t\Delta y\Delta x \tag{6.66}$$

したがって、

$$
\begin{aligned}
&-E_{\mathrm{g}z}\left(x_0,y_0,z_0-0,t\right)+E_{\mathrm{g}z}\left(x_0,y_0,z_0+0,t\right) && (6.67)\\
=&\frac{1}{\varepsilon_0}\int J_{\mathrm{g}z}\left(x_0,y_0,z_0-0,t\right)\mathrm{d}t-\frac{1}{\varepsilon_0}\int J_{\mathrm{g}z}\left(x_0,y_0,z_0+0,t\right)\mathrm{d}t && (6.68)
\end{aligned}
$$

ここで、電流密度ベクトルが

$$
\boldsymbol{J}_i=\begin{pmatrix} J_{xi}\\ J_{yi}\\ J_{zi}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} J_{x0i}\exp(ik_i\cos\theta_i z+ik_i\sin\theta_i x-i\omega t)\\ J_{y0i}\exp(ik_i\cos\theta_i z+ik_i\sin\theta_i x-i\omega t)\\ J_{z0i}\exp(ik_i\cos\theta_i z+ik_i\sin\theta_i x-i\omega t)\end{pmatrix} \tag{6.69}
$$

$$
\boldsymbol{J}_r=\begin{pmatrix} J_{xr}\\ J_{yr}\\ J_{zr}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} J_{x0r}\exp(-ik_r\cos\theta_r z+ik_r\sin\theta_r x-i\omega t)\\ J_{y0r}\exp(-ik_r\cos\theta_r z+ik_r\sin\theta_r x-i\omega t)\\ J_{z0r}\exp(-ik_r\cos\theta_r z+ik_r\sin\theta_r x-i\omega t)\end{pmatrix} \tag{6.70}
$$

$$
\boldsymbol{J}_t=\begin{pmatrix} J_{xt}\\ J_{yt}\\ J_{zt}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} J_{x0t}\exp(ik_t\cos\theta_t z+ik_t\sin\theta_t x-i\omega t)\\ J_{y0t}\exp(ik_t\cos\theta_t z+ik_t\sin\theta_t x-i\omega t)\\ J_{z0t}\exp(ik_t\cos\theta_t z+ik_t\sin\theta_t x-i\omega t)\end{pmatrix} \tag{6.71}
$$

と表される場合、左辺は、

$$
\begin{aligned}
&-E_{\mathrm{g}z}\left(x_0,y_0,z_0-0,t\right)+E_{\mathrm{g}z}\left(x_0,y_0,z_0+0,t\right) && (6.72)\\
=&-E_{z0i}\exp(ik_i\cos\theta_i z_0+ik_i\sin\theta_i x_0-i\omega t)-E_{z0r}\exp(-ik_r\cos\theta_r z_0+ik_r\sin\theta_r x_0-i\omega t) && (6.73)\\
&+E_{z0t}\exp(ik_t\cos\theta_t z_0+ik_t\sin\theta_t x_0-i\omega t) && (6.74)
\end{aligned}
$$

であり、右辺は、

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\varepsilon_0}\int J_{\mathrm{g}z}\left(x_0,y_0,z_0-0,t\right)\mathrm{d}t-\frac{1}{\varepsilon_0}\int J_{\mathrm{g}z}\left(x_0,y_0,z_0+0,t\right)\mathrm{d}t && (6.75)\\
=&\frac{1}{\varepsilon_0}\int\left[J_{z0i}\exp(ik_i\cos\theta_i z_0+ik_i\sin\theta_i x_0-i\omega t)+J_{z0r}\exp(-ik_r\cos\theta_r z_0+ik_r\sin\theta_r x_0-i\omega t)\right]\mathrm{d}t && (6.76)\\
&-\frac{1}{\varepsilon_0}\int J_{z0t}\exp(ik_t\cos\theta_t z_0+ik_t\sin\theta_t x_0-i\omega t)\mathrm{d}t && (6.77)\\
=&\frac{i}{\varepsilon_0\omega}\left[J_{z0i}\exp(ik_i\cos\theta_i z_0+ik_i\sin\theta_i x_0-i\omega t)+J_{z0r}\exp(-ik_r\cos\theta_r z_0+ik_r\sin\theta_r x_0-i\omega t)\right] && (6.78)\\
&-\frac{i}{\varepsilon_0\omega}J_{z0t}\exp(ik_t\cos\theta_t z_0+ik_t\sin\theta_t x_0-i\omega t) && (6.79)
\end{aligned}
$$

したがって、

$$
\begin{aligned}
&-E_{z0i}\exp(ik_i\cos\theta_i z_0+ik_i\sin\theta_i x_0-i\omega t)-E_{z0r}\exp(-ik_r\cos\theta_r z_0+ik_r\sin\theta_r x_0-i\omega t) && (6.80)\\
&+E_{z0t}\exp(ik_t\cos\theta_t z_0+ik_t\sin\theta_t x_0-i\omega t) && (6.81)\\
=&\frac{i}{\varepsilon_0\omega}\left[J_{z0i}\exp(ik_i\cos\theta_i z_0+ik_i\sin\theta_i x_0-i\omega t)+J_{z0r}\exp(-ik_r\cos\theta_r z_0+ik_r\sin\theta_r x_0-i\omega t)\right] && (6.82)\\
&-\frac{i}{\varepsilon_0\omega}J_{z0t}\exp(ik_t\cos\theta_t z_0+ik_t\sin\theta_t x_0-i\omega t) && (6.83)
\end{aligned}
$$

(6.28) 式を用いて、

$$
\begin{aligned}
&-E_{z0i}\exp(ik_i\cos\theta_i z_0)-E_{z0r}\exp(-ik_r\cos\theta_r z_0)+E_{z0t}\exp(ik_t\cos\theta_t z_0)\\
=&\frac{i}{\varepsilon_0\omega}\left[J_{z0i}\exp(ik_i\cos\theta_i z_0)+J_{z0r}\exp(-ik_r\cos\theta_r z_0)-J_{z0t}\exp(ik_t\cos\theta_t z_0)\right] \qquad (6.84)
\end{aligned}
$$

ところで、(1.2) 式より、

$$
\begin{aligned}
&i\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B}_0\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-i\omega t)\\
&=\mu_0\boldsymbol{J}_0\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-i\omega t)+\varepsilon_0\mu_0(-i\omega)\boldsymbol{E}_0\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-i\omega t) \qquad (6.85)\\
&i\left(k_xB_{y0}-k_yB_{x0}\right)\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-i\omega t)\\
&=\mu_0J_{z0}\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-i\omega t)+\varepsilon_0\mu_0(-i\omega)E_{z0}\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-i\omega t) \qquad (6.86)\\
ik_xB_{y0}&=\mu_0J_{z0}+\varepsilon_0\mu_0(-i\omega)E_{z0} \qquad (6.87)
\end{aligned}
$$

が成り立っているから、

$$\mu_0J_{z0}=-\varepsilon_0\mu_0(-i\omega)E_{z0}+ik_xB_{y0} \qquad (6.88)$$

$$J_{z0}=i\varepsilon_0\omega E_{z0}+\frac{i}{\mu_0}k_xB_{y0} \qquad (6.89)$$

従って、

$$
\begin{aligned}
&-E_{z0i}\exp(ik_i\cos\theta_i z_0)-E_{z0r}\exp(-ik_r\cos\theta_r z_0)+E_{z0t}\exp(ik_t\cos\theta_t z_0)\\
=&\frac{i}{\varepsilon_0\omega}\left[i\varepsilon_0\omega E_{z0i}+\frac{i}{\mu_0}k_{xi}B_{y0i}\right]\exp(ik_i\cos\theta_i z_0)\\
&+\frac{i}{\varepsilon_0\omega}\left[i\varepsilon_0\omega E_{z0r}+\frac{i}{\mu_0}k_{xr}B_{y0r}\right]\exp(-ik_r\cos\theta_r z_0)\\
&+\frac{i}{\varepsilon_0\omega}\left[-i\varepsilon_0\omega E_{z0t}-\frac{i}{\mu_0}k_{xt}B_{y0t}\right]\exp(ik_t\cos\theta_t z_0) \qquad (6.90)\\
0=&-\frac{1}{\varepsilon_0\omega\mu_0}k_i\sin\theta_iB_{y0i}\exp(ik_i\cos\theta_i z_0)\\
&-\frac{1}{\varepsilon_0\omega\mu_0}k_r\sin\theta_rB_{y0r}\exp(-ik_r\cos\theta_r z_0)\\
&+\frac{1}{\varepsilon_0\omega\mu_0}k_t\sin\theta_tB_{y0t}\exp(ik_t\cos\theta_t z_0) \qquad (6.91)
\end{aligned}
$$

$k_i\sin\theta_i=k_r\sin\theta_r=k_t\sin\theta_t=A$ と置いて、

$$0=-\frac{A}{\varepsilon_0\omega\mu_0}\left[B_{y0i}\exp(ik_i\cos\theta_i z_0)+B_{y0r}\exp(-ik_r\cos\theta_r z_0)-B_{y0t}\exp(ik_t\cos\theta_t z_0)\right] \qquad (6.92)$$

これは (6.48) 式に帰結する。

さて、電流密度ベクトルを導電テンソルを用いて表示できる場合は、

$$
\begin{aligned}
&-E_{z0i}\exp(ik_i\cos\theta_i z_0)-E_{z0r}\exp(-ik_r\cos\theta_r z_0)+E_{z0t}\exp(ik_t\cos\theta_t z_0) \qquad (6.93)\\
=&\frac{i}{\varepsilon_0\omega}\left(\sigma_{zxi}E_{x0i}+\sigma_{zyi}E_{y0i}+\sigma_{zzi}E_{z0i}\right)\exp(ik_i\cos\theta_i z_0) \qquad (6.94)\\
&+\frac{i}{\varepsilon_0\omega}\left(\sigma_{zxr}E_{x0r}+\sigma_{zyr}E_{y0r}+\sigma_{zzr}E_{z0r}\right)\exp(-ik_r\cos\theta_r z_0) \qquad (6.95)\\
&-\frac{i}{\varepsilon_0\omega}\left(\sigma_{zxt}E_{x0t}+\sigma_{zyt}E_{y0t}+\sigma_{zzt}E_{z0t}\right)\exp(ik_t\cos\theta_t z_0) \qquad (6.96)
\end{aligned}
$$

特に、$z_0=0$ のときは、

$$-E_{z0i}-E_{z0r}+E_{z0t}=\frac{i}{\varepsilon_0\omega}\left(J_{z0i}+J_{z0r}-J_{z0t}\right) \tag{6.97}$$

$$=\frac{i}{\varepsilon_0\omega}\left(\sigma_{zxi}E_{x0i}+\sigma_{zyi}E_{y0i}+\sigma_{zzi}E_{z0i}\right) \tag{6.98}$$

$$+\frac{i}{\varepsilon_0\omega}\left(\sigma_{zxr}E_{x0r}+\sigma_{zyr}E_{y0r}+\sigma_{zzr}E_{z0r}\right) \tag{6.99}$$

$$-\frac{i}{\varepsilon_0\omega}\left(\sigma_{zxt}E_{x0t}+\sigma_{zyt}E_{y0t}+\sigma_{zzt}E_{z0t}\right) \tag{6.100}$$

6.1.1.0.4　磁束保存の式について　磁束保存の式は

$$\oint_S \boldsymbol{B}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)\cdot d\boldsymbol{S}=0 \tag{6.101}$$

マクスウェル-ガウスの式と同様の計算過程を経て、

$$\boxed{-B_{\mathrm{g}z}\left(x_0,y_0,z_0-0,t\right)+B_{\mathrm{g}z}\left(x_0,y_0,z_0+0,t\right)=0} \tag{6.102}$$

波動である場合は、

$$B_{z0t}\exp(ik_t\cos\theta_t z_0)=B_{z0i}\exp(ik_i\cos\theta_i z_0)+B_{z0r}\exp(-ik_r\cos\theta_r z_0) \tag{6.103}$$

特に、$z=z_0$ で境界がある場合は、

$$B_{z0t}=B_{z0i}+B_{z0r} \tag{6.104}$$

6.1.1.0.5　まとめると　まとめると、

$$E_{\mathrm{g}x}\left(x_0,y_0,z_0+0,t\right)-E_{\mathrm{g}x}\left(x_0,y_0,z_0-0,t\right)$$
$$=0 \tag{6.105}$$

$$E_{\mathrm{g}y}\left(x_0,y_0,z_0+0,t\right)-E_{\mathrm{g}y}\left(x_0,y_0,z_0-0,t\right)$$
$$=0 \tag{6.106}$$

$$E_{\mathrm{g}z}\left(x_0,y_0,z_0+0,t\right)-E_{\mathrm{g}z}\left(x_0,y_0,z_0-0,t\right)$$
$$=\frac{1}{\varepsilon_0}\int J_{\mathrm{g}z}\left(x_0,y_0,z_0-0,t\right)\mathrm{d}t-\frac{1}{\varepsilon_0}\int J_{\mathrm{g}z}\left(x_0,y_0,z_0+0,t\right)\mathrm{d}t \tag{6.107}$$

$$B_{\mathrm{g}x}\left(x_0,y_0,z_0+0,t\right)-B_{\mathrm{g}x}\left(x_0,y_0,z_0-0,t\right)$$
$$=0 \tag{6.108}$$

$$B_{\mathrm{g}y}\left(x_0,y_0,z_0+0,t\right)-B_{\mathrm{g}y}\left(x_0,y_0,z_0-0,t\right)$$
$$=0 \tag{6.109}$$

$$B_{\mathrm{g}z}\left(x_0,y_0,z_0+0,t\right)-B_{\mathrm{g}z}\left(x_0,y_0,z_0-0,t\right)$$
$$=0 \tag{6.110}$$

波動である場合、

$$
\begin{aligned}
&E_{x0t}\exp\left(ik_t\cos\theta_t z_0\right)-E_{x0i}\exp\left(ik_i\cos\theta_i z_0\right)-E_{x0r}\exp\left(-ik_r\cos\theta_r z_0\right)\\
=&0 \qquad (6.111)\\
&E_{y0t}\exp\left(ik_t\cos\theta_t z_0\right)-E_{y0i}\exp\left(ik_i\cos\theta_i z_0\right)-E_{y0r}\exp\left(-ik_r\cos\theta_r z_0\right)\\
=&0 \qquad (6.112)\\
&E_{z0t}\exp\left(ik_t\cos\theta_t z_0\right)-E_{z0i}\exp\left(ik_i\cos\theta_i z_0\right)-E_{z0r}\exp\left(-ik_r\cos\theta_r z_0\right)\\
=&-\frac{i}{\varepsilon_0\omega}\left(\sigma_{zxt}E_{x0t}+\sigma_{zyt}E_{y0t}+\sigma_{zzt}E_{z0t}\right)\exp(ik_t\cos\theta_t z_0)\\
&+\frac{i}{\varepsilon_0\omega}\left(\sigma_{zxi}E_{x0i}+\sigma_{zyi}E_{y0i}+\sigma_{zzi}E_{z0i}\right)\exp(ik_i\cos\theta_i z_0)\\
&+\frac{i}{\varepsilon_0\omega}\left(\sigma_{zxr}E_{x0r}+\sigma_{zyr}E_{y0r}+\sigma_{zzr}E_{z0r}\right)\exp(-ik_r\cos\theta_r z_0) \qquad (6.113)\\
&B_{x0t}\exp\left(ik_t\cos\theta_t z_0\right)-B_{x0i}\exp\left(ik_i\cos\theta_i z_0\right)-B_{x0r}\exp\left(-ik_r\cos\theta_r z_0\right)\\
=&0 \qquad (6.114)\\
&B_{y0t}\exp\left(ik_t\cos\theta_t z_0\right)-B_{y0i}\exp\left(ik_i\cos\theta_i z_0\right)-B_{y0r}\exp\left(-ik_r\cos\theta_r z_0\right)\\
=&0 \qquad (6.115)\\
&B_{z0t}\exp\left(ik_t\cos\theta_t z_0\right)-B_{z0i}\exp\left(ik_i\cos\theta_i z_0\right)-B_{z0r}\exp\left(-ik_r\cos\theta_r z_0\right)\\
=&0 \qquad (6.116)
\end{aligned}
$$

特に、$z_0=0$ が境界である場合、

$$
\begin{aligned}
E_{x0t}-E_{x0i}-E_{x0r}=&0 \qquad (6.117)\\
E_{y0t}-E_{y0i}-E_{y0r}=&0 \qquad (6.118)\\
E_{z0t}-E_{z0i}-E_{z0r}=&-\frac{i}{\varepsilon_0\omega}\left(\sigma_{zxt}E_{x0t}+\sigma_{zyt}E_{y0t}+\sigma_{zzt}E_{z0t}\right)\\
&+\frac{i}{\varepsilon_0\omega}\left(\sigma_{zxi}E_{x0i}+\sigma_{zyi}E_{y0i}+\sigma_{zzi}E_{z0i}\right)\\
&+\frac{i}{\varepsilon_0\omega}\left(\sigma_{zxr}E_{x0r}+\sigma_{zyr}E_{y0r}+\sigma_{zzr}E_{z0r}\right) \qquad (6.119)\\
B_{x0t}-B_{x0i}-B_{x0r}=&0 \qquad (6.120)\\
B_{y0t}-B_{y0i}-B_{y0r}=&0 \qquad (6.121)\\
B_{z0t}-B_{z0i}-B_{z0r}=&0 \qquad (6.122)
\end{aligned}
$$

6.1.1.0.5.1 静電波の場合 静電波の場合、$\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)=-\nabla\phi_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)$ である。$\phi_{\mathrm{g}}=\phi_0\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-i\omega t)$ とすれば、$-\nabla\phi_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)=-i\boldsymbol{k}\phi_0\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-i\omega t)$ となるから、$\boldsymbol{E}_{\mathrm{g}}(\boldsymbol{r},t)=\boldsymbol{E}_0\exp(i\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-i\omega t)$ であるならば、

$$\boldsymbol{E}_0=-i\boldsymbol{k}\phi_0 \qquad (6.123)$$

なお、$\boldsymbol{B}_0=\boldsymbol{0}$ となる。

$z_0 = 0$ を境界とした式へ代入すると、電場に関する 3 式は、

$$(-ik_{xt}\phi_{0t}) - (-ik_{xi}\phi_{0i}) - (-ik_{xr}\phi_{0r}) = 0 \tag{6.124}$$

$$(-ik_{yt}\phi_{0t}) - (-ik_{yi}\phi_{0i}) - (-ik_{yr}\phi_{0r}) = 0 \tag{6.125}$$

$$\begin{aligned}(-ik_{zt}\phi_{0t}) - (-ik_{zi}\phi_{0i}) - (-ik_{zr}\phi_{0r}) =& -\frac{i}{\varepsilon_0\omega}\left(\sigma_{zxt}(-ik_{xt}\phi_{0t}) + \sigma_{zyt}(-ik_{yt}\phi_{0t}) + \sigma_{zzt}(-ik_{zt}\phi_{0t})\right)\\ &+\frac{i}{\varepsilon_0\omega}\left(\sigma_{zxi}(-ik_{xi}\phi_{0i}) + \sigma_{zyi}(-ik_{yi}\phi_{0i}) + \sigma_{zzi}(-ik_{zi}\phi_{0i})\right)\\ &+\frac{i}{\varepsilon_0\omega}\left(\sigma_{zxr}(-ik_{xr}\phi_{0r}) + \sigma_{zyr}(-ik_{yr}\phi_{0r}) + \sigma_{zzr}(-ik_{zr}\phi_{0r})\right)\end{aligned} \tag{6.126}$$

ここで、$k_{yi} = k_{yr} = k_{yt} = 0$ とするとともに、波数ベクトルの成分を入射角、反射角、透過角を用いて表示する。

$$(-ik_t \sin\theta_t\phi_{0t}) - (-ik_i \sin\theta_i\phi_{0i}) - (-ik_r \sin\theta_r\phi_{0r}) = 0 \tag{6.127}$$

$$\begin{aligned}(-ik_t\cos\theta_t\phi_{0t}) - (-ik_i\cos\theta_i\phi_{0i}) - (ik_r\cos\theta_r\phi_{0r}) =& -\frac{i}{\varepsilon_0\omega}\left(\sigma_{zxt}(-ik_t\sin\theta_t\phi_{0t}) + \sigma_{zzt}(-ik_t\cos\theta_t\phi_{0t})\right)\\ &+\frac{i}{\varepsilon_0\omega}\left(\sigma_{zxi}(-ik_i\sin\theta_i\phi_{0i}) + \sigma_{zzi}(-ik_i\cos\theta_i\phi_{0i})\right)\\ &+\frac{i}{\varepsilon_0\omega}\left(\sigma_{zxr}(-ik_r\sin\theta_r\phi_{0r}) + \sigma_{zzr}(ik_r\cos\theta_r\phi_{0r})\right)\end{aligned} \tag{6.128}$$

(6.28) 式から、

$$\phi_{0t} - \phi_{0i} - \phi_{0r} = 0 \tag{6.129}$$

$$\begin{aligned}(-ik_t\cos\theta_t\phi_{0t}) - (-ik_i\cos\theta_i\phi_{0i}) - (ik_r\cos\theta_r\phi_{0r}) =& -\frac{i}{\varepsilon_0\omega}\left(\sigma_{zxt}(-ik_t\sin\theta_t\phi_{0t}) + \sigma_{zzt}(-ik_t\cos\theta_t\phi_{0t})\right)\\ &+\frac{i}{\varepsilon_0\omega}\left(\sigma_{zxi}(-ik_i\sin\theta_i\phi_{0i}) + \sigma_{zzi}(-ik_i\cos\theta_i\phi_{0i})\right)\\ &+\frac{i}{\varepsilon_0\omega}\left(\sigma_{zxr}(-ik_r\sin\theta_r\phi_{0r}) + \sigma_{zzr}(ik_r\cos\theta_r\phi_{0r})\right)\end{aligned} \tag{6.130}$$

ということになる。

6.1.2 反射角、透過角を用いないで、反射波、透過波を表してみる。

$\theta_i = 0$ の場合、必然的に $\theta_r = \theta_t = 0$ となる。すなわち、境界面に対して垂直に入射する場合、反射波、透過波ともに境界面に対して垂直に進行する。

反射角 θ_r、屈折角 θ_t は、$0 < \theta_t, \theta_r < \pi/2$ であるから、$\theta_r \geq 0$、$\cos\theta_t \geq 0$ である。すると、

$$k_{tx} = k_{ix} \tag{6.131}$$

$$k_{tz} = \sqrt{{k_t}^2 - {k_{tx}}^2} \tag{6.132}$$

$$= \sqrt{{k_t}^2 - {k_{ix}}^2} \tag{6.133}$$

同様に、

$$k_{rx} = k_{ix} \tag{6.134}$$

$$k_{rz} = -\sqrt{{k_r}^2 - {k_{rx}}^2} \tag{6.135}$$

$$= -\sqrt{{k_r}^2 - {k_{ix}}^2} \tag{6.136}$$

したがって、

$$\boldsymbol{E}_t = \begin{pmatrix} E_{x0t}\exp\left(i\sqrt{{k_t}^2 - {k_{ix}}^2}z + ik_{ix}x - i\omega t\right) \\ E_{y0t}\exp\left(i\sqrt{{k_t}^2 - {k_{ix}}^2}z + ik_{ix}x - i\omega t\right) \\ E_{z0t}\exp\left(i\sqrt{{k_t}^2 - {k_{ix}}^2}z + ik_{ix}x - i\omega t\right) \end{pmatrix} \tag{6.137}$$

$$\boldsymbol{E}_r = \begin{pmatrix} E_{x0r}\exp\left(-i\sqrt{{k_r}^2 - {k_{ix}}^2}z + ik_{ix}x - i\omega t\right) \\ E_{y0r}\exp\left(-i\sqrt{{k_r}^2 - {k_{ix}}^2}z + ik_{ix}x - i\omega t\right) \\ E_{z0r}\exp\left(-i\sqrt{{k_r}^2 - {k_{ix}}^2}z + ik_{ix}x - i\omega t\right) \end{pmatrix} \tag{6.138}$$

6.2 外部磁場の向きが境界面と平行の場合

平面 $z=0$ を境界として、環境が変わるとする。また、ここでは、波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ は y 成分も持つとする。したがって、

$$\begin{cases} k_{\mathrm{i}x} = k_{\mathrm{r}x} = k_{\mathrm{t}x} \\ k_{\mathrm{i}y} = k_{\mathrm{r}y} = k_{\mathrm{t}y} \end{cases} \tag{6.139}$$

が成り立つ。

$z>0$ の空間において、外部磁場が x 方向を向いているとする。

$$\begin{cases} \boldsymbol{k}_{\mathrm{t}\parallel} = k_{\mathrm{t}x}\hat{\boldsymbol{x}} \\ \boldsymbol{k}_{\mathrm{t}\perp} = k_{\mathrm{t}y}\hat{\boldsymbol{y}} + k_{\mathrm{t}z}\hat{\boldsymbol{z}} \end{cases} \tag{6.140}$$

分散関係から $k_\perp$ が求められる場合、すなわち、$k_\perp = k_\perp\left(k_\parallel\right)$ である場合、

$${k_{\mathrm{t}z}}^2 = \left\{k_{\mathrm{t}\perp}\left(k_{t\parallel}\right)\right\}^2 - {k_{\mathrm{t}y}}^2 \tag{6.141}$$

$$= \left\{k_{\mathrm{t}\perp}\left(k_{ix}\right)\right\}^2 - {k_{\mathrm{i}y}}^2 \tag{6.142}$$

6.3 反射係数、透過係数を求める

入射波、反射波、透過波の波動が、(6.5)-(6.10) 式のとおりであったとする。また、境界を $z=0$ の平面にあるとする。

(1.28) 式から、

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix} &= \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} k_y E_z - k_z E_y \\ k_z E_x - k_x E_z \\ k_x E_y - k_y E_x \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} -k_z E_y \\ k_z E_x - k_x E_z \\ k_x E_y \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{6.143}
$$

入射波、反射波、透過波それぞれに当てはめると、

$$
\begin{pmatrix} B_{xi} \\ B_{yi} \\ B_{zi} \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} -k_{iz} E_{yi} \\ k_{iz} E_{xi} - k_{ix} E_{zi} \\ k_{ix} E_{yi} \end{pmatrix} \tag{6.144}
$$

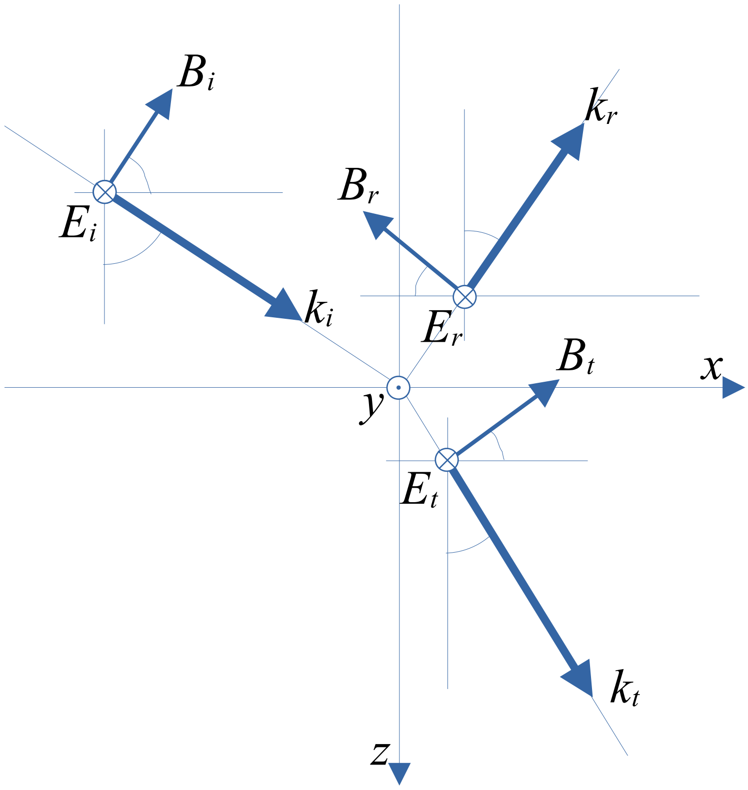
$$
\begin{pmatrix} B_{xr} \\ B_{yr} \\ B_{zr} \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} -k_{rz} E_{yr} \\ k_{rz} E_{xr} - k_{rx} E_{zr} \\ k_{rx} E_{yr} \end{pmatrix} \tag{6.145}
$$

$$
\begin{pmatrix} B_{xt} \\ B_{yt} \\ B_{zt} \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega} \begin{pmatrix} -k_{tz} E_{yt} \\ k_{tz} E_{xt} - k_{xt} E_{zt} \\ k_{tx} E_{yt} \end{pmatrix} \tag{6.146}
$$

(6.117)-(6.122) 式に当てはめると、

$$
\begin{cases}
E_{x0t} - E_{x0i} - E_{x0r} = 0 \\
E_{y0t} - E_{y0i} - E_{y0r} = 0 \\
E_{z0t} - E_{z0i} - E_{z0r} = -\frac{i}{\varepsilon_0 \omega} \left(\sigma_{zxt} E_{x0t} + \sigma_{zyt} E_{y0t} + \sigma_{zzt} E_{z0t} \right) \\
+\frac{i}{\varepsilon_0 \omega} \left(\sigma_{zxi} E_{x0i} + \sigma_{zyi} E_{y0i} + \sigma_{zzi} E_{z0i} \right) \\
+\frac{i}{\varepsilon_0 \omega} \left(\sigma_{zxr} E_{x0r} + \sigma_{zyr} E_{y0r} + \sigma_{zzr} E_{z0r} \right) \\
(-k_{tz} E_{y0t}) - (-k_{iz} E_{y0i}) - (-k_{rz} E_{yr}) = 0 \\
(k_{tz} E_{x0t} - k_{tx} E_{z0t}) - (k_{iz} E_{x0i} - k_{ix} E_{z0i}) - (-k_{rz} E_{x0r} - k_{rx} E_{z0r}) = 0 \\
(k_{tx} E_{y0t}) - (k_{ix} E_{y0i}) - (k_{rx} E_{y0r}) = 0
\end{cases} \tag{6.147}
$$

xyz 成分でなく、TE 波成分 $E_{\mathrm{TE}}, B_{\mathrm{TE}}$、TM 波成分 $E_{\mathrm{TM}}, B_{\mathrm{TM}}$、縦波成分 E_l, B_l を用いて (6.117)-(6.122)



式に当てはめると、

$$
\begin{aligned}
&(E_{\mathrm{TM}0t}\cos\theta_t + E_{l0t}\sin\theta_t) - (E_{\mathrm{TM}0i}\cos\theta_i + E_{l0i}\sin\theta_i) - (-E_{\mathrm{TM}0r}\cos\theta_r + E_{l0r}\sin\theta_r)\\
=&0
\end{aligned}
\tag{6.148}
$$

$$
\begin{aligned}
&(-E_{\mathrm{TE}0t}) - (-E_{\mathrm{TE}0i}) - (-E_{\mathrm{TE}0r})\\
=&0
\end{aligned}
\tag{6.149}
$$

$$
\begin{aligned}
&(-E_{\mathrm{TM}0t}\sin\theta_t + E_{l0t}\cos\theta_t) - (-E_{\mathrm{TM}0i}\sin\theta_i + E_{l0i}\cos\theta_i) - (-E_{\mathrm{TM}0r}\sin\theta_r - E_{l0r}\cos\theta_r)\\
=&-\frac{i}{\varepsilon_0\omega}\left(\sigma_{zxt}\left(E_{\mathrm{TM}0t}\cos\theta_t + E_{l0t}\sin\theta_t\right) + \sigma_{zyt}\left(-E_{\mathrm{TE}0t}\right) + \sigma_{zzt}\left(-E_{\mathrm{TM}0t}\sin\theta_t + E_{l0t}\cos\theta_t\right)\right)\\
&+\frac{i}{\varepsilon_0\omega}\left(\sigma_{zxi}\left(E_{\mathrm{TM}0i}\cos\theta_i + E_{l0i}\sin\theta_i\right) + \sigma_{zyi}\left(-E_{\mathrm{TE}0i}\right) + \sigma_{zzi}\left(-E_{\mathrm{TM}0i}\sin\theta_i + E_{l0i}\cos\theta_i\right)\right)\\
&+\frac{i}{\varepsilon_0\omega}\left(\sigma_{zxr}\left(-E_{\mathrm{TM}0r}\cos\theta_r + E_{l0r}\sin\theta_r\right) + \sigma_{zyr}\left(-E_{\mathrm{TE}0r}\right) + \sigma_{zzr}\left(-E_{\mathrm{TM}0r}\sin\theta_r - E_{l0r}\cos\theta_r\right)\right)
\end{aligned}
\tag{6.150}
$$

$$
\begin{aligned}
&(B_{\mathrm{TE}0t}\cos\theta_t) - (B_{\mathrm{TE}0i}\cos\theta_i) - (-B_{\mathrm{TE}0r}\cos\theta_r)\\
=&0
\end{aligned}
\tag{6.151}
$$

$$
\begin{aligned}
&B_{\mathrm{TM}0t} - B_{\mathrm{TM}0i} - B_{\mathrm{TM}0r}\\
=&0
\end{aligned}
\tag{6.152}
$$

$$
\begin{aligned}
&(-B_{\mathrm{TE}0t}\sin\theta_t) - (-B_{\mathrm{TE}0i}\sin\theta_i) - (-B_{\mathrm{TE}0r}\sin\theta_r)\\
=&0
\end{aligned}
\tag{6.153}
$$

$\omega B_{\mathrm{TM0}} = kE_{\mathrm{TM0}}$、$\omega B_{\mathrm{TE0}} = kE_{\mathrm{TE0}}$ となるよう向きを定めているので、

$$\begin{aligned}
&(E_{\mathrm{TM0}t}\cos\theta_t + E_{l0t}\sin\theta_t) - (E_{\mathrm{TM0}i}\cos\theta_i + E_{l0i}\sin\theta_i) - (-E_{\mathrm{TM0}r}\cos\theta_r + E_{l0r}\sin\theta_r)\\
=&0 \qquad (6.154)\\
&(-E_{\mathrm{TE0}t}) - (-E_{\mathrm{TE0}i}) - (-E_{\mathrm{TE0}r})\\
=&0 \qquad (6.155)\\
&(-E_{\mathrm{TM0}t}\sin\theta_t + E_{l0t}\cos\theta_t) - (-E_{\mathrm{TM0}i}\sin\theta_i + E_{l0i}\cos\theta_i) - (-E_{\mathrm{TM0}r}\sin\theta_r - E_{l0r}\cos\theta_r)\\
=&-\frac{i}{\varepsilon_0\omega}\left(\sigma_{zxt}\left(E_{\mathrm{TM0}t}\cos\theta_t + E_{l0t}\sin\theta_t\right) + \sigma_{zyt}\left(-E_{\mathrm{TE0}t}\right) + \sigma_{zzt}\left(-E_{\mathrm{TM0}t}\sin\theta_t + E_{l0t}\cos\theta_t\right)\right)\\
&+\frac{i}{\varepsilon_0\omega}\left(\sigma_{zxi}\left(E_{\mathrm{TM0}i}\cos\theta_i + E_{l0i}\sin\theta_i\right) + \sigma_{zyi}\left(-E_{\mathrm{TE0}i}\right) + \sigma_{zzi}\left(-E_{\mathrm{TM0}i}\sin\theta_i + E_{l0i}\cos\theta_i\right)\right)\\
&+\frac{i}{\varepsilon_0\omega}\left(\sigma_{zxr}\left(-E_{\mathrm{TM0}r}\cos\theta_r + E_{l0r}\sin\theta_r\right) + \sigma_{zyr}\left(-E_{\mathrm{TE0}r}\right) + \sigma_{zzr}\left(-E_{\mathrm{TM0}r}\sin\theta_r - E_{l0r}\cos\theta_r\right)\right)\\
&\qquad (6.156)\\
&(k_tE_{\mathrm{TE0}t}\cos\theta_t) - (k_iE_{\mathrm{TE0}i}\cos\theta_i) - (-k_rE_{\mathrm{TE0}r}\cos\theta_r)\\
=&0 \qquad (6.157)\\
&k_tE_{\mathrm{TM0}t} - k_iE_{\mathrm{TM0}i} - k_rE_{\mathrm{TM0}r}\\
=&0 \qquad (6.158)\\
&(-k_tE_{\mathrm{TE0}t}\sin\theta_t) - (-k_iE_{\mathrm{TE0}i}\sin\theta_i) - (-k_rE_{\mathrm{TE0}r}\sin\theta_r)\\
=&0 \qquad (6.159)
\end{aligned}$$

このうち、TE 波成分のみを含む式、

$$(-E_{\mathrm{TE0}t}) - (-E_{\mathrm{TE0}i}) - (-E_{\mathrm{TE0}r}) = 0 \qquad (6.160)$$

$$(k_tE_{\mathrm{TE0}t}\cos\theta_t) - (k_iE_{\mathrm{TE0}i}\cos\theta_i) - (-k_rE_{\mathrm{TE0}r}\cos\theta_r) = 0 \qquad (6.161)$$

$$(-k_tE_{\mathrm{TE0}t}\sin\theta_t) - (-k_iE_{\mathrm{TE0}i}\sin\theta_i) - (-k_rE_{\mathrm{TE0}r}\sin\theta_r) = 0 \qquad (6.162)$$

から、$E_{\mathrm{TE0}t}$、$E_{\mathrm{TE0}r}$ は求めることができる。これに対し、未知数 $E_{\mathrm{TM0}t}$、$E_{\mathrm{TM0}r}$、E_{l0t}、E_{l0r} は、

$$\begin{aligned}
&(E_{\mathrm{TM0}t}\cos\theta_t + E_{l0t}\sin\theta_t) - (E_{\mathrm{TM0}i}\cos\theta_i + E_{l0i}\sin\theta_i) - (-E_{\mathrm{TM0}r}\cos\theta_r + E_{l0r}\sin\theta_r)\\
=&0 \qquad (6.163)\\
&(-E_{\mathrm{TM0}t}\sin\theta_t + E_{l0t}\cos\theta_t) - (-E_{\mathrm{TM0}i}\sin\theta_i + E_{l0i}\cos\theta_i) - (-E_{\mathrm{TM0}r}\sin\theta_r - E_{l0r}\cos\theta_r)\\
=&-\frac{i}{\varepsilon_0\omega}\left(\sigma_{zxt}\left(E_{\mathrm{TM0}t}\cos\theta_t + E_{l0t}\sin\theta_t\right) + \sigma_{zyt}\left(-E_{\mathrm{TE0}t}\right) + \sigma_{zzt}\left(-E_{\mathrm{TM0}t}\sin\theta_t + E_{l0t}\cos\theta_t\right)\right)\\
&+\frac{i}{\varepsilon_0\omega}\left(\sigma_{zxi}\left(E_{\mathrm{TM0}i}\cos\theta_i + E_{l0i}\sin\theta_i\right) + \sigma_{zyi}\left(-E_{\mathrm{TE0}i}\right) + \sigma_{zzi}\left(-E_{\mathrm{TM0}i}\sin\theta_i + E_{l0i}\cos\theta_i\right)\right)\\
&+\frac{i}{\varepsilon_0\omega}\left(\sigma_{zxr}\left(-E_{\mathrm{TM0}r}\cos\theta_r + E_{l0r}\sin\theta_r\right) + \sigma_{zyr}\left(-E_{\mathrm{TE0}r}\right) + \sigma_{zzr}\left(-E_{\mathrm{TM0}r}\sin\theta_r - E_{l0r}\cos\theta_r\right)\right)\\
&\qquad (6.164)\\
&k_tE_{\mathrm{TM0}t} - k_iE_{\mathrm{TM0}i} - k_rE_{\mathrm{TM0}r}\\
=&0 \qquad (6.165)
\end{aligned}$$

から求めないといけない。

6.3.0.0.1　縦波成分が存在しない場合について求める　話が難しくなるので、縦波が存在しない場合について入射率反射率を求めてみる。

6.3.0.0.1.1　TE 成分　とりあえず、ＴＥ成分の反射係数、透過係数を求める。上述のとおり用いる式は、

$$\begin{cases}(-E_{\mathrm{TE}0t})-(-E_{\mathrm{TE}0i})-(-E_{\mathrm{TE}0r})=0\\(k_tE_{\mathrm{TE}0t}\cos\theta_t)-(k_iE_{\mathrm{TE}0i}\cos\theta_i)-(-k_rE_{\mathrm{TE}0r}\cos\theta_r)=0\\(-k_tE_{\mathrm{TE}0t}\sin\theta_t)-(-k_iE_{\mathrm{TE}0i}\sin\theta_i)-(-k_rE_{\mathrm{TE}0r}\sin\theta_r)=0\end{cases}\tag{6.166}$$

であるが、(6.28) 式から第１式と第３式は同じである。したがって、

$$\begin{cases}(-E_{\mathrm{TE}0t})-(-E_{\mathrm{TE}0i})-(-E_{\mathrm{TE}0r})=0\\(k_tE_{\mathrm{TE}0t}\cos\theta_t)-(k_iE_{\mathrm{TE}0i}\cos\theta_i)-(-k_rE_{\mathrm{TE}0r}\cos\theta_r)=0\end{cases}\tag{6.167}$$

を解けばよい。

第１式に k_t を掛けて、

$$\begin{cases}-k_tE_{\mathrm{TE}0t}\cos\theta_t+k_tE_{\mathrm{TE}0i}\cos\theta_t+k_tE_{\mathrm{TE}0r}\cos\theta_t=0\\k_tE_{\mathrm{TE}0t}\cos\theta_t-k_iE_{\mathrm{TE}0i}\cos\theta_i+k_rE_{\mathrm{TE}0r}\cos\theta_r=0\end{cases}\tag{6.168}$$

辺々足して、

$$(k_t\cos\theta_t-k_i\cos\theta_i)\,E_{\mathrm{TE}0i}+(k_t\cos\theta_t+k_r\cos\theta_r)\,E_{\mathrm{TE}0r}=0\tag{6.169}$$

したがって、

$$\boxed{\frac{E_{\mathrm{TE}0r}}{E_{\mathrm{TE}0i}}=\frac{k_i\cos\theta_i-k_t\cos\theta_t}{k_t\cos\theta_t+k_r\cos\theta_r}}\tag{6.170}$$

磁場の反射係数については、

$$\begin{aligned}\frac{B_{\mathrm{TE}0r}}{B_{\mathrm{TE}0i}}&=\frac{k_rE_{\mathrm{TE}0r}}{k_iE_{\mathrm{TE}0i}}\\&=\frac{k_ik_r\cos\theta_i-k_rk_t\cos\theta_t}{k_ik_t\cos\theta_t+k_ik_r\cos\theta_r}\end{aligned}\tag{6.171}$$

したがって、

$$\boxed{\frac{B_{\mathrm{TE}0r}}{B_{\mathrm{TE}0i}}=\frac{\frac{1}{k_t}\cos\theta_i-\frac{1}{k_i}\cos\theta_t}{\frac{1}{k_r}\cos\theta_t+\frac{1}{k_t}\cos\theta_r}}\tag{6.172}$$

透過係数を求めると、

$$-k_rE_{\mathrm{TE}0t}\cos\theta_r+k_rE_{\mathrm{TE}0i}\cos\theta_r+k_rE_{\mathrm{TE}0r}\cos\theta_r=0\tag{6.173}$$

$$k_tE_{\mathrm{TE}0t}\cos\theta_t-k_iE_{\mathrm{TE}0i}\cos\theta_i+k_rE_{\mathrm{TE}0r}\cos\theta_r=0\tag{6.174}$$

辺々を引いて、

$$(-k_r\cos\theta_r-k_t\cos\theta_t)\,E_{\mathrm{TE}0t}+(k_r\cos\theta_r+k_i\cos\theta_i)\,E_{\mathrm{TE}0i}=0\tag{6.175}$$

したがって、

$$\boxed{\frac{E_{\mathrm{TE}0t}}{E_{\mathrm{TE}0i}}=\frac{k_i\cos\theta_i+k_r\cos\theta_r}{k_t\cos\theta_t+k_r\cos\theta_r}}\tag{6.176}$$

磁場の透過係数については、

$$
\begin{aligned}
\frac{B_{\mathrm{TE0}t}}{B_{\mathrm{TE0}i}} =& \frac{k_t}{k_i}\frac{E_{\mathrm{TE0}t}}{E_{\mathrm{TE0}i}} \\
=& \frac{k_i k_t \cos\theta_i + k_r k_t \cos\theta_r}{k_i k_t \cos\theta_t + k_i k_r \cos\theta_r}
\end{aligned} \tag{6.177}
$$

$$
\boxed{\frac{B_{\mathrm{TE0}t}}{B_{\mathrm{TE0}i}} = \frac{\frac{1}{k_r}\cos\theta_i + \frac{1}{k_i}\cos\theta_r}{\frac{1}{k_r}\cos\theta_t + \frac{1}{k_t}\cos\theta_r}} \tag{6.178}
$$

6.3.0.0.1.2 TM 成分

$$
\begin{cases}
(E_{\mathrm{TM0}t}\cos\theta_t) - (E_{\mathrm{TM0}i}\cos\theta_i) - (-E_{\mathrm{TM0}r}\cos\theta_r) = 0 \\
(-E_{\mathrm{TM0}t}\sin\theta_t) - (-E_{\mathrm{TM0}i}\sin\theta_i) - (-E_{\mathrm{TM0}r}\sin\theta_r) \\
= -\frac{i}{\varepsilon_0\omega}\left(\sigma_{zxt}\left(E_{\mathrm{TM0}t}\cos\theta_t\right) + \sigma_{zyt}\left(-E_{\mathrm{TE0}t}\right) + \sigma_{zzt}\left(-E_{\mathrm{TM0}t}\sin\theta_t\right)\right) \\
+\frac{i}{\varepsilon_0\omega}\left(\sigma_{zxi}\left(E_{\mathrm{TM0}i}\cos\theta_i\right) + \sigma_{zyi}\left(-E_{\mathrm{TE0}i}\right) + \sigma_{zzi}\left(-E_{\mathrm{TM0}i}\sin\theta_i\right)\right) \\
+\frac{i}{\varepsilon_0\omega}\left(\sigma_{zxr}\left(-E_{\mathrm{TM0}r}\cos\theta_r\right) + \sigma_{zyr}\left(-E_{\mathrm{TE0}r}\right) + \sigma_{zzr}\left(-E_{\mathrm{TM0}r}\sin\theta_r\right)\right) \\
k_t E_{\mathrm{TM0}t} - k_i E_{\mathrm{TM0}i} - k_r E_{\mathrm{TM0}r} = 0
\end{cases} \tag{6.179}
$$

第１式と第３式を利用する。第１式に k_t を、第３式に $\cos\theta_t$ を掛ける。

$$
\begin{cases}
k_t E_{\mathrm{TM0}t}\cos\theta_t - k_t E_{\mathrm{TM0}i}\cos\theta_i + k_t E_{\mathrm{TM0}r}\cos\theta_r = 0 \\
k_t E_{\mathrm{TM0}t}\cos\theta_t - k_i E_{\mathrm{TM0}i}\cos\theta_t - k_r E_{\mathrm{TM0}r}\cos\theta_t = 0
\end{cases} \tag{6.180}
$$

辺々を引いて、電場の反射係数を求める。

$$
-k_t E_{\mathrm{TM0}i}\cos\theta_i + k_i E_{\mathrm{TM0}i}\cos\theta_t + k_t E_{\mathrm{TM0}r}\cos\theta_r + k_r E_{\mathrm{TM0}r}\cos\theta_t = 0 \tag{6.181}
$$

$$
k_t E_{\mathrm{TM0}r}\cos\theta_r + k_r E_{\mathrm{TM0}r}\cos\theta_t = k_t E_{\mathrm{TM0}i}\cos\theta_i - k_i E_{\mathrm{TM0}i}\cos\theta_t \tag{6.182}
$$

$$
\left(k_t\cos\theta_r + k_r\cos\theta_t\right)E_{\mathrm{TM0}r} = \left(k_t\cos\theta_i - k_i\cos\theta_t\right)E_{\mathrm{TM0}i} \tag{6.183}
$$

$$
\frac{E_{\mathrm{TM0}r}}{E_{\mathrm{TM0}i}} = \frac{k_t\cos\theta_i - k_i\cos\theta_t}{k_t\cos\theta_r + k_r\cos\theta_t} \tag{6.184}
$$

磁場の反射係数については、

$$
\begin{aligned}
\frac{B_{\mathrm{TM0}r}}{B_{\mathrm{TM0}i}} =& \frac{k_r E_{\mathrm{TM0}r}}{k_i E_{\mathrm{TM0}i}} \\
=& \frac{k_r k_t\cos\theta_i - k_r k_i\cos\theta_t}{k_i k_t\cos\theta_r + k_i k_r\cos\theta_t} \qquad (6.185) \\
=& \frac{\frac{1}{k_i}\cos\theta_i - \frac{1}{k_t}\cos\theta_t}{\frac{1}{k_r}\cos\theta_r + \frac{1}{k_t}\cos\theta_t} \qquad (6.186)
\end{aligned}
$$

第１式に k_r を、第３式に $\cos\theta_r$ を掛ける。

$$
\begin{cases}
k_r E_{\mathrm{TM0}t}\cos\theta_t - k_r E_{\mathrm{TM0}i}\cos\theta_i + k_r E_{\mathrm{TM0}r}\cos\theta_r = 0 \\
k_t E_{\mathrm{TM0}t}\cos\theta_r - k_i E_{\mathrm{TM0}i}\cos\theta_r - k_r E_{\mathrm{TM0}r}\cos\theta_r = 0
\end{cases} \tag{6.187}
$$

辺々足して、

$$k_r E_{\mathrm{TM}0t}\cos\theta_t + k_t E_{\mathrm{TM}0t}\cos\theta_r - k_r E_{\mathrm{TM}0i}\cos\theta_i - k_i E_{\mathrm{TM}0i}\cos\theta_r = 0 \tag{6.188}$$

$$k_r E_{\mathrm{TM}0t}\cos\theta_t + k_t E_{\mathrm{TM}0t}\cos\theta_r = k_r E_{\mathrm{TM}0i}\cos\theta_i + k_i E_{\mathrm{TM}0i}\cos\theta_r \tag{6.189}$$

$$\left(k_r\cos\theta_t + k_t\cos\theta_r\right) E_{\mathrm{TM}0t} = \left(k_r\cos\theta_i + k_i\cos\theta_r\right) E_{\mathrm{TM}0i} \tag{6.190}$$

$$\frac{E_{\mathrm{TM}0t}}{E_{\mathrm{TM}0i}} = \frac{k_r\cos\theta_i + k_i\cos\theta_r}{k_r\cos\theta_t + k_t\cos\theta_r} \tag{6.191}$$

磁場の透過係数については、

$$\begin{aligned}\frac{B_{\mathrm{TM}0t}}{B_{\mathrm{TM}0i}} &= \frac{k_t}{k_i}\frac{E_{\mathrm{TM}0t}}{E_{\mathrm{TM}0i}} \\ &= \frac{k_r k_t\cos\theta_i + k_i k_t\cos\theta_r}{k_r k_i\cos\theta_t + k_t k_i\cos\theta_r} \qquad (6.192)\\ &= \frac{\frac{1}{k_i}\cos\theta_i + \frac{1}{k_r}\cos\theta_r}{\frac{1}{k_t}\cos\theta_t + \frac{1}{k_r}\cos\theta_r} \qquad (6.193)\end{aligned}$$

6.3.0.0.1.3 $\cos\theta$ を用いないで表してみる。 $\cos\theta_i = k_{iz}/k_i$, $\cos\theta_r = -k_{rz}/k_r$, $\cos\theta_t = k_{tz}/k_t$ の関係を用いて、反射係数、透過係数の式からコサインを消してみる。

$$\frac{E_{\mathrm{TE}0r}}{E_{\mathrm{TE}0i}} = \frac{k_i\cos\theta_i - k_t\cos\theta_t}{k_t\cos\theta_t + k_r\cos\theta_r} = \frac{k_{iz}-k_{tz}}{k_{tz}-k_{rz}} \tag{6.194}$$

$$\frac{E_{\mathrm{TE}0t}}{E_{\mathrm{TE}0i}} = \frac{k_i\cos\theta_i + k_r\cos\theta_r}{k_t\cos\theta_t + k_r\cos\theta_r} = \frac{k_{iz}-k_{rz}}{k_{tz}-k_{rz}} \tag{6.195}$$

$$\frac{E_{\mathrm{TM}0r}}{E_{\mathrm{TM}0i}} = \frac{k_t\cos\theta_i - k_i\cos\theta_t}{k_t\cos\theta_r + k_r\cos\theta_t} = \frac{k_t\frac{k_{iz}}{k_i} - k_i\frac{k_{tz}}{k_t}}{-k_t\frac{k_{rz}}{k_r} + k_r\frac{k_{tz}}{k_t}} = \frac{k_t^2 k_r k_{iz} - k_i^2 k_r k_{tz}}{-k_t^2 k_i k_{rz} + k_r^2 k_i k_{tz}} = \frac{k_r}{k_i}\frac{k_t^2 k_{iz} - k_i^2 k_{tz}}{k_r^2 k_{tz} - k_t^2 k_{rz}} \tag{6.196}$$

$$\frac{E_{\mathrm{TM}0t}}{E_{\mathrm{TM}0i}} = \frac{k_r\cos\theta_i + k_i\cos\theta_r}{k_r\cos\theta_t + k_t\cos\theta_r} = \frac{k_r\frac{k_{iz}}{k_i} - k_i\frac{k_{rz}}{k_r}}{k_r\frac{k_{tz}}{k_t} - k_t\frac{k_{rz}}{k_r}} = \frac{k_r^2 k_t k_{iz} - k_i^2 k_t k_{rz}}{k_r^2 k_i k_{tz} - k_t^2 k_i k_{rz}} = \frac{k_t}{k_i}\frac{k_r^2 k_{iz} - k_i^2 k_{rz}}{k_r^2 k_{tz} - k_t^2 k_{rz}} \tag{6.197}$$

6.3.0.0.2 垂直入射の場合 垂直入射の場合について考える。$\theta_i = \theta_r = \theta_t = 0$ より、

$$E_{\mathrm{TM}0t} - E_{\mathrm{TM}0i} + E_{\mathrm{TM}0r} = 0 \tag{6.198}$$

$$-E_{\mathrm{TE}0t} + E_{\mathrm{TE}0i} + E_{\mathrm{TE}0r} = 0 \tag{6.199}$$

$$\begin{aligned}E_{l0t} - E_{l0i} + E_{l0r} =& -\frac{i}{\varepsilon_0\omega}\left(\sigma_{zxt}E_{\mathrm{TM}0t} + \sigma_{zyt}\left(-E_{\mathrm{TE}0t}\right) + \sigma_{zzt}E_{l0t}\right)\\ &+\frac{i}{\varepsilon_0\omega}\left(\sigma_{zxi}E_{\mathrm{TM}0i} + \sigma_{zyi}\left(-E_{\mathrm{TE}0i}\right) + \sigma_{zzi}E_{l0i}\right)\\ &+\frac{i}{\varepsilon_0\omega}\left(\sigma_{zxr}\left(-E_{\mathrm{TM}0r}\right) + \sigma_{zyr}\left(-E_{\mathrm{TE}0r}\right) + \sigma_{zzr}\left(-E_{l0r}\right)\right)\end{aligned} \tag{6.200}$$

$$k_t E_{\mathrm{TE}0t} - k_i E_{\mathrm{TE}0i} + k_r E_{\mathrm{TE}0r} = 0 \tag{6.201}$$

$$k_t E_{\mathrm{TM}0t} - k_i E_{\mathrm{TM}0i} - k_r E_{\mathrm{TM}0r} = 0 \tag{6.202}$$

$$0 = 0 \tag{6.203}$$

ＴＥ波とＴＭ波の透過係数と反射係数は求められる。

$$\frac{E_{\mathrm{TE}0r}}{E_{\mathrm{TE}0i}} = \frac{k_i - k_t}{k_t + k_r} \tag{6.204}$$

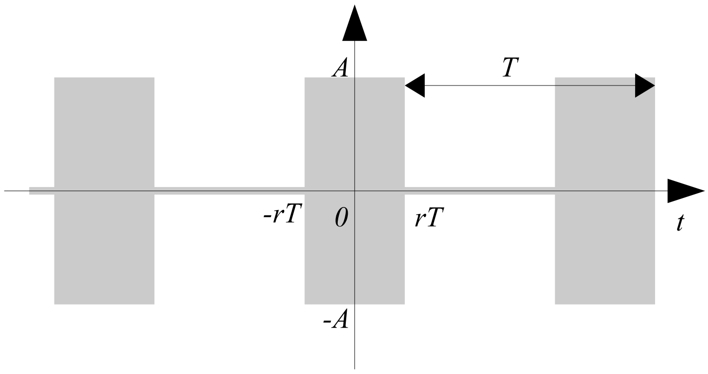
$$\frac{B_{\mathrm{TE}0r}}{B_{\mathrm{TE}0i}} = \frac{\frac{1}{k_t} - \frac{1}{k_i}}{\frac{1}{k_r} + \frac{1}{k_t}} \tag{6.205}$$

$$\frac{E_{\mathrm{TE}0t}}{E_{\mathrm{TE}0i}} = \frac{k_i + k_r}{k_t + k_r} \tag{6.206}$$

$$\frac{B_{\mathrm{TE}0t}}{B_{\mathrm{TE}0i}} = \frac{\frac{1}{k_r} + \frac{1}{k_i}}{\frac{1}{k_r} + \frac{1}{k_t}} \tag{6.207}$$

第7章　波束について

7.1　波束を求める



$0 < r < 1/2$ とし、上の図のように、$-rT < t < rT$ の区間では振幅 A、角周波数 ω の振動をし、$-T < t < -rT$ 及び $rT < t < T$ の区間では振動しない状態を周期 T で繰り返す波動を考える。すなわち、k を整数として、

$$E(t) = \begin{cases} A\sin(\omega t) & (kT - rT < t < kT + rT) \\ 0 & (kT + rT < t < (k+1)T - rT) \end{cases}$$

で振動する場合を考える。

周期 T の基本波の角周波数は $\Omega = 2\pi/T$ であることと $E(t)$ は $t = 0$ を原点とした奇関数であることを考慮して $E(t)$ をフーリエ級数展開する。すなわち、

$$E(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\Omega t)$$

で表すことを考える。簡単のため、T を $2\pi/\omega$ の整数 N 倍、rT も $2\pi/\omega$ の整数倍とする。

$$b_n \quad = \quad \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} E(t)\sin(n\Omega t)dt$$

を計算すると、$n \neq N$ の場合は、

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} E(t)\sin(n\Omega t)dt \\
&= \frac{2}{T}\int_{-rT}^{rT} A\sin(N\Omega t)\sin(n\Omega t)dt \\
&= \frac{2A}{T}\int_{-rT}^{rT} \sin(N\Omega t)\sin(n\Omega t)dt \\
&= \frac{A}{T}\int_{-rT}^{rT} \left\{\cos(N\Omega t - n\Omega t) - \cos(N\Omega t + n\Omega t)\right\} dt \\
&= \frac{A}{T}\int_{-rT}^{rT} \left[\cos\left\{(N-n)\Omega t\right\} - \cos\left\{(N+n)\Omega t\right\}\right] dt \\
&= \frac{A}{T}\left[\frac{1}{(N-n)\Omega}\sin(N-n)\Omega t - \frac{1}{(N+n)\Omega}\sin(N+n)\Omega t\right]_{-rT}^{rT} \\
&= \frac{A}{\pi}\left[\frac{1}{N-n}\sin 2\pi r(N-n) - \frac{1}{N+n}\sin 2\pi r(N+n)\right]
\end{aligned}$$

rN は整数となるから、

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{A}{\pi}\left[-\frac{1}{N-n}\sin 2\pi rn - \frac{1}{N+n}\sin 2\pi rn\right] \\
&= -\frac{A}{\pi}\left[\frac{1}{N-n} + \frac{1}{N+n}\right]\sin 2\pi rn \\
&= -\frac{A}{\pi}\left[\frac{N+n}{N^2-n^2} + \frac{N-n}{N^2-n^2}\right]\sin 2\pi rn \\
&= -\frac{A}{\pi}\frac{2N}{N^2-n^2}\sin 2\pi rn
\end{aligned}$$

$n = N$ の場合は、

$$\begin{aligned}
b_N &= \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} E(t)\sin N\Omega t dt \\
&= \frac{2}{T}\int_{-rT}^{rT} A\sin(N\Omega t)\sin N\Omega t dt \\
&= \frac{2A}{T}\int_{-rT}^{rT} \sin(N\Omega t)\sin N\Omega t dt \\
&= \frac{A}{T}\int_{-rT}^{rT} \cos(N\Omega t - N\Omega t) - \cos(N\Omega t + N\Omega t)dt \\
&= \frac{A}{T}\int_{-rT}^{rT} 1 - \cos 2N\Omega t dt \\
&= \frac{A}{T}\left[t - \frac{1}{2N\Omega}\sin 2N\Omega t\right]_{-rT}^{rT} \\
&= \frac{A}{T}\left[2rT - \frac{1}{N\Omega}\sin 2N\Omega rT\right]
\end{aligned}$$

rN は整数となるから、

$$b_N = 2rA$$

第8章　荷電粒子の運動

Z 方向を磁場の方向とする。運動方程式は、

$$m_{\mathrm{s}}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}\left(t\right)}{\mathrm{d}t}=q_{\mathrm{s}}\boldsymbol{v}_{\mathrm{s}}\left(t\right)\times\boldsymbol{B}$$

成分表示して、

$$m_{\mathrm{s}}\begin{pmatrix}\dfrac{\mathrm{d}v_{X\mathrm{s}}\left(t\right)}{\mathrm{d}t}\\\dfrac{\mathrm{d}v_{Y\mathrm{s}}\left(t\right)}{\mathrm{d}t}\\\dfrac{\mathrm{d}v_{\mathrm{s}}\left(t\right)}{\mathrm{d}t}\end{pmatrix}=q_{\mathrm{s}}\begin{pmatrix}v_{X\mathrm{s}}\left(t\right)\\v_{Y\mathrm{s}}\left(t\right)\\v_{Z\mathrm{s}}\left(t\right)\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\0\\B\end{pmatrix}\tag{8.1}$$

$$=q_{\mathrm{s}}\begin{pmatrix}v_{Y\mathrm{s}}\left(t\right)B\\-v_{X\mathrm{s}}\left(t\right)B\\0\end{pmatrix}\tag{8.2}$$

$$\begin{pmatrix}\dfrac{\mathrm{d}v_{X\mathrm{s}}\left(t\right)}{\mathrm{d}t}\\\dfrac{\mathrm{d}v_{Y\mathrm{s}}\left(t\right)}{\mathrm{d}t}\\\dfrac{\mathrm{d}v_{\mathrm{s}}\left(t\right)}{\mathrm{d}t}\end{pmatrix}=\omega_{\mathrm{cs}}\begin{pmatrix}v_{Y\mathrm{s}}\left(t\right)\\-v_{X\mathrm{s}}\left(t\right)\\0\end{pmatrix}\tag{8.3}$$

したがって、

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2v_{X\mathrm{s}}\left(t\right)}{\mathrm{d}t^2}=-{\omega_{\mathrm{cs}}}^2v_{X\mathrm{s}}\left(t\right)\\\dfrac{\mathrm{d}^2v_{Y\mathrm{s}}}{\mathrm{d}t^2}=-{\omega_{\mathrm{cs}}}^2v_{Y\mathrm{s}}\left(t\right)\\\dfrac{\mathrm{d}^2v_{Z\mathrm{s}}}{\mathrm{d}t^2}=0\end{cases}\tag{8.4}$$

となって、解は、

$$\begin{cases}v_{X\mathrm{s}}\left(t\right)=A\sin\omega_{\mathrm{cs}}t+B\cos\omega_{\mathrm{cs}}t\\v_{Y\mathrm{s}}\left(t\right)=C\sin\omega_{\mathrm{cs}}t+D\cos\omega_{\mathrm{cs}}t\\v_{Z\mathrm{s}}\left(t\right)=v_{Z\mathrm{s}0}\end{cases}\tag{8.5}$$

初期条件を用いて、

$$\begin{cases}v_{X\mathrm{s}}\left(t\right)=A\sin\omega_{\mathrm{cs}}t+v_{X\mathrm{s}0}\cos\omega_{\mathrm{cs}}t\\v_{Y\mathrm{s}}\left(t\right)=C\sin\omega_{\mathrm{cs}}t+v_{Y\mathrm{s}0}\cos\omega_{\mathrm{cs}}t\\v_{Z\mathrm{s}}\left(t\right)=v_{Z\mathrm{s}0}\end{cases}\tag{8.6}$$

$$\frac{\mathrm{d}v_{X\mathrm{s}}\left(t\right)}{\mathrm{d}t}=A\omega_{\mathrm{cs}}\cos\omega_{\mathrm{cs}}t-v_{X\mathrm{s}0}\omega_{\mathrm{cs}}\sin\omega_{\mathrm{cs}}t\tag{8.7}$$

$$\omega_{\mathrm{cs}}v_{Y\mathrm{s}}\left(t\right)=\omega_{\mathrm{cs}}C\sin\omega_{\mathrm{cs}}t+\omega_{\mathrm{cs}}v_{Y\mathrm{s}0}\cos\omega_{\mathrm{cs}}t\tag{8.8}$$

比較して、

$$\begin{cases} A = v_{Y\mathrm{s}0} \\ C = -v_{X\mathrm{s}0} \end{cases} \tag{8.9}$$

$$\begin{cases} v_{X\mathrm{s}}\left(t\right) = v_{X\mathrm{s}0}\cos\omega_{\mathrm{cs}}t + v_{Y\mathrm{s}0}\sin\omega_{\mathrm{cs}}t \\ v_{Y\mathrm{s}}\left(t\right) = v_{Y\mathrm{s}0}\cos\omega_{\mathrm{cs}}t - v_{X\mathrm{s}0}\sin\omega_{\mathrm{cs}}t \\ v_{Z\mathrm{s}}\left(t\right) = v_{Z\mathrm{s}0} \end{cases} \tag{8.10}$$

積分して、

$$\begin{cases} X_{\mathrm{s}}\left(t\right) = \dfrac{1}{\omega_{\mathrm{cs}}}v_{X\mathrm{s}0}\sin\omega_{\mathrm{cs}}t - \dfrac{1}{\omega_{\mathrm{cs}}}v_{Y\mathrm{s}0}\cos\omega_{\mathrm{cs}}t + E \\ Y_{\mathrm{s}}\left(t\right) = \dfrac{1}{\omega_{\mathrm{cs}}}v_{Y\mathrm{s}0}\sin\omega_{\mathrm{cs}}t + \dfrac{1}{\omega_{\mathrm{cs}}}v_{X\mathrm{s}0}\cos\omega_{\mathrm{cs}}t + F \\ Z_{\mathrm{s}}\left(t\right) = v_{Z\mathrm{s}0}t + Z_{\mathrm{s}0} \end{cases} \tag{8.11}$$

$X_{\mathrm{s}}\left(0\right) = X_{\mathrm{s}0}$、$Y_{\mathrm{s}}\left(0\right) = Y_{\mathrm{s}0}$ となるよう、積分定数 E,F を決定する。

$$\begin{cases} X_{\mathrm{s}}\left(0\right) = -\dfrac{1}{\omega_{\mathrm{cs}}}v_{Y\mathrm{s}0} + E = X_{\mathrm{s}0} \\ Y_{\mathrm{s}}\left(0\right) = \dfrac{1}{\omega_{\mathrm{cs}}}v_{X\mathrm{s}0} + F = Y_{\mathrm{s}0} \end{cases} \tag{8.12}$$

$$\begin{cases} E = X_{\mathrm{s}0} + \dfrac{1}{\omega_{\mathrm{cs}}}v_{Y\mathrm{s}0} \\ F = Y_{\mathrm{s}0} - \dfrac{1}{\omega_{\mathrm{cs}}}v_{X\mathrm{s}0} \end{cases} \tag{8.13}$$

$$\begin{cases} X_{\mathrm{s}}\left(t\right) = \dfrac{1}{\omega_{\mathrm{cs}}}v_{X\mathrm{s}0}\sin\omega_{\mathrm{cs}}t - \dfrac{1}{\omega_{\mathrm{cs}}}v_{Y\mathrm{s}0}\cos\omega_{\mathrm{cs}}t + X_{\mathrm{s}0} + \dfrac{1}{\omega_{\mathrm{cs}}}v_{Y\mathrm{s}0} \\ Y_{\mathrm{s}}\left(t\right) = \dfrac{1}{\omega_{\mathrm{cs}}}v_{Y\mathrm{s}0}\sin\omega_{\mathrm{cs}}t + \dfrac{1}{\omega_{\mathrm{cs}}}v_{X\mathrm{s}0}\cos\omega_{\mathrm{cs}}t + Y_{\mathrm{s}0} - \dfrac{1}{\omega_{\mathrm{cs}}}v_{X\mathrm{s}0} \\ Z_{\mathrm{s}}\left(t\right) = v_{Z\mathrm{s}0}t + Z_{\mathrm{s}0} \end{cases} \tag{8.14}$$

$$\begin{cases} X_{\mathrm{s}}\left(t\right) = \dfrac{1}{\omega_{\mathrm{cs}}}v_{X\mathrm{s}0}\sin\omega_{\mathrm{cs}}t - \dfrac{1}{\omega_{\mathrm{cs}}}v_{Y\mathrm{s}0}\left(\cos\omega_{\mathrm{cs}}t - 1\right) + X_{\mathrm{s}0} \\ Y_{\mathrm{s}}\left(t\right) = \dfrac{1}{\omega_{\mathrm{cs}}}v_{Y\mathrm{s}0}\sin\omega_{\mathrm{cs}}t + \dfrac{1}{\omega_{\mathrm{cs}}}v_{X\mathrm{s}0}\left(\cos\omega_{\mathrm{cs}}t - 1\right) + Y_{\mathrm{s}0} \\ Z_{\mathrm{s}}\left(t\right) = v_{Z\mathrm{s}0}t + Z_{\mathrm{s}0} \end{cases} \tag{8.15}$$

$$\begin{pmatrix} X_{\mathrm{s}}\left(t\right) \\ Y_{\mathrm{s}}\left(t\right) \\ Z_{\mathrm{s}}\left(t\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\omega_{\mathrm{cs}}}v_{X\mathrm{s}0}\sin\omega_{\mathrm{cs}}t - \dfrac{1}{\omega_{\mathrm{cs}}}v_{Y\mathrm{s}0}\left(\cos\omega_{\mathrm{cs}}t - 1\right) \\ \dfrac{1}{\omega_{\mathrm{cs}}}v_{Y\mathrm{s}0}\sin\omega_{\mathrm{cs}}t + \dfrac{1}{\omega_{\mathrm{cs}}}v_{X\mathrm{s}0}\left(\cos\omega_{\mathrm{cs}}t - 1\right) \\ v_{Z\mathrm{s}0}t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_{\mathrm{s}0} \\ Y_{\mathrm{s}0} \\ Z_{\mathrm{s}0} \end{pmatrix} \tag{8.16}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\omega_{\mathrm{cs}}}\sin\omega_{\mathrm{cs}}t & -\dfrac{1}{\omega_{\mathrm{cs}}}\left(\cos\omega_{\mathrm{cs}}t - 1\right) & 0 \\ \dfrac{1}{\omega_{\mathrm{cs}}}\left(\cos\omega_{\mathrm{cs}}t - 1\right) & \dfrac{1}{\omega_{\mathrm{cs}}}\sin\omega_{\mathrm{cs}}t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{X\mathrm{s}0} \\ v_{Y\mathrm{s}0} \\ v_{Z\mathrm{s}0} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_{\mathrm{s}0} \\ Y_{\mathrm{s}0} \\ Z_{\mathrm{s}0} \end{pmatrix} \tag{8.17}$$

$$\boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{T}(t)\cdot\boldsymbol{V}_0 + \boldsymbol{R}_0 \tag{8.18}$$

回転行列を $\mathbf{\Theta}$ とする。

$$\boldsymbol{r}(t) = \mathbf{\Theta}^{-1} \cdot \boldsymbol{R}(t) \tag{8.19}$$
$$= \mathbf{\Theta}^{-1} \cdot \boldsymbol{T}(t) \cdot \boldsymbol{V}_0 + \mathbf{\Theta}^{-1} \cdot \boldsymbol{R}_0 \tag{8.20}$$
$$= \mathbf{\Theta}^{-1} \cdot \boldsymbol{T}(t) \cdot \mathbf{\Theta} \cdot \boldsymbol{v}_0 + \mathbf{\Theta}^{-1} \cdot \mathbf{\Theta} \cdot \boldsymbol{r}_0 \tag{8.21}$$
$$= \mathbf{\Theta}^{-1} \cdot \boldsymbol{T}(t) \cdot \mathbf{\Theta} \cdot \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{r}_0 \tag{8.22}$$

別のやり方では、

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} X_{\mathrm{s}}(t) & Y_{\mathrm{s}}(t) & Z_{\mathrm{s}}(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_{\mathrm{cs}}} v_{X\mathrm{s}0} \sin \omega_{\mathrm{cs}} t - \frac{1}{\omega_{\mathrm{cs}}} v_{Y\mathrm{s}0} (\cos \omega_{\mathrm{cs}} t - 1) & \frac{1}{\omega_{\mathrm{cs}}} v_{Y\mathrm{s}0} \sin \omega_{\mathrm{cs}} t + \frac{1}{\omega_{\mathrm{cs}}} v_{X\mathrm{s}0} (\cos \omega_{\mathrm{cs}} t - 1) & v_{Z\mathrm{s}0} t \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} X_{\mathrm{s}0} & Y_{\mathrm{s}0} & Z_{\mathrm{s}0} \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{8.23}$$

$$= \begin{pmatrix} v_{X\mathrm{s}0} & v_{Y\mathrm{s}0} & v_{Z\mathrm{s}0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_{\mathrm{cs}}} \sin \omega_{\mathrm{cs}} t & \frac{1}{\omega_{\mathrm{cs}}} (\cos \omega_{\mathrm{cs}} t - 1) & 0 \\ -\frac{1}{\omega_{\mathrm{cs}}} (\cos \omega_{\mathrm{cs}} t - 1) & \frac{1}{\omega_{\mathrm{cs}}} \sin \omega_{\mathrm{cs}} t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_{\mathrm{s}0} & Y_{\mathrm{s}0} & Z_{\mathrm{s}0} \end{pmatrix} \tag{8.24}$$

$$\boldsymbol{R}(t) = \boldsymbol{V}_0 \cdot \boldsymbol{T}_1(t) + \boldsymbol{R}_0 \tag{8.25}$$

右から掛ける回転行列を $\mathbf{\Theta}_1$ とする。

$$\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{R}(t) \cdot \mathbf{\Theta}_1^{-1} \tag{8.26}$$
$$= \boldsymbol{V}_0 \cdot \boldsymbol{T}_1(t) \cdot \mathbf{\Theta}_1^{-1} + \boldsymbol{R}_0 \cdot \mathbf{\Theta}_1^{-1} \tag{8.27}$$
$$= \boldsymbol{v}_0 \cdot \mathbf{\Theta}_1 \cdot \boldsymbol{T}_1(t) \cdot \mathbf{\Theta}_1^{-1} + \boldsymbol{r}_0 \cdot \mathbf{\Theta}_1 \cdot \mathbf{\Theta}_1^{-1} \tag{8.28}$$
$$= \boldsymbol{v}_0 \cdot \mathbf{\Theta}_1 \cdot \boldsymbol{T}_1(t) \cdot \mathbf{\Theta}_1^{-1} + \boldsymbol{r}_0 \tag{8.29}$$

$$A_x \hat{\boldsymbol{x}} + A_y \hat{\boldsymbol{y}} + A_z \hat{\boldsymbol{z}} = A_X \hat{\boldsymbol{X}} + A_Y \hat{\boldsymbol{Y}} + A_Z \hat{\boldsymbol{Z}} \tag{8.30}$$

$$A_X = A_x \hat{\boldsymbol{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{X}} + A_y \hat{\boldsymbol{y}} \cdot \hat{\boldsymbol{X}} + A_z \hat{\boldsymbol{z}} \cdot \hat{\boldsymbol{X}} \tag{8.31}$$
$$= A_x \cos \theta + A_z \cos(\theta + \pi/2) \tag{8.32}$$
$$= A_x \cos \theta - A_z \sin \theta \tag{8.33}$$

$$A_x = A_X \hat{\boldsymbol{X}} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} + A_Y \hat{\boldsymbol{Y}} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} + A_Z \hat{\boldsymbol{Z}} \cdot \hat{\boldsymbol{x}} \tag{8.34}$$
$$= A_X \cos \theta + A_Z \cos(\pi/2 - \theta) \tag{8.35}$$
$$= A_X \cos \theta + A_Z \sin \theta \tag{8.36}$$

$$A_Z = A_x \hat{\boldsymbol{x}} \cdot \hat{\boldsymbol{Z}} + A_y \hat{\boldsymbol{y}} \cdot \hat{\boldsymbol{Z}} + A_z \hat{\boldsymbol{z}} \cdot \hat{\boldsymbol{Z}} \tag{8.37}$$
$$= A_x \cos(\pi/2 - \theta) + A_z \cos \theta \tag{8.38}$$
$$= A_x \sin \theta + A_z \cos \theta \tag{8.39}$$

$$
\begin{aligned}
A_z =& A_X \hat{\boldsymbol{X}} \cdot \hat{\boldsymbol{z}} + A_Y \hat{\boldsymbol{Y}} \cdot \hat{\boldsymbol{z}} + A_Z \hat{\boldsymbol{Z}} \cdot \hat{\boldsymbol{z}} & (8.40) \\
=& A_X \cos(\pi/2 + \theta) + A_Z \cos\theta & (8.41) \\
=& - A_X \sin\theta + A_Z \cos\theta & (8.42)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{pmatrix} A_X \\ A_Y \\ A_Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \tag{8.43}
$$

$$
\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_X \\ A_Y \\ A_Z \end{pmatrix} \tag{8.44}
$$

第9章　数学的検討

9.1　周期関数の時間平均

例えば、

$$A(t) = A_0 \exp(-i\omega t)$$

及び

$$B(t) = B_0 \exp(-i\omega t)$$

（A_0、B_0、ω は複素数）があったとする。これらの複素共役は、

$$A^*(t) = {A_0}^* \exp(i\omega^* t)$$

及び

$$B^*(t) = {B_0}^* \exp(i\omega^* t)$$

である。

以下では、$\omega_r = \Re(\omega)$、$\omega_i = \Im(\omega)$ とする。

$\omega_r \neq 0$ とし、時刻 $t = t_0$ における $\Re(A(t))\Re(B(t))$ の時間平均は、

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{T}\int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} \frac{A(t)+A^*(t)}{2}\frac{B(t)+B^*(t)}{2}\mathrm{d}t \\
=&\ \frac{1}{T}\int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} \frac{A(t)+A^*(t)}{2}\frac{B(t)+B^*(t)}{2}\mathrm{d}t \\
=&\ \frac{1}{4T}\int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} (A(t)B(t)+A^*(t)B(t)+A^*(t)B(t)+A^*(t)B^*(t))\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

ここで、$T = (2\pi)/\omega_r$ である。

被積分項第１項の積分は、$\exp(i\omega_r T) = 1$、$\exp(i\omega_r(-T)) = 1$ であることに注意して、

$$\int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} A(t)B(t)\mathrm{d}t \tag{9.1}$$
$$= \int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} A_0 \exp(-i\omega t) B_0 \exp(-i\omega t)\mathrm{d}t \tag{9.2}$$
$$= A_0 B_0 \int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} \exp(-2i\omega t)\mathrm{d}t \tag{9.3}$$
$$= \frac{A_0 B_0}{-2i\omega} \left[\exp(-2i\omega t)\right]_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} \tag{9.4}$$
$$= \frac{A_0 B_0}{-2i\omega} \left[\exp(-2i\omega(t_0+T/2)) - \exp(-2i\omega(t_0-T/2))\right] \tag{9.5}$$
$$= \frac{A_0 B_0}{-2i\omega} \exp(-2i\omega t_0) \left[\exp(-i\omega T) - \exp(-i\omega(-T))\right] \tag{9.6}$$
$$= \frac{A_0 B_0}{-2i\omega} \exp(-2i(\omega_r + i\omega_i)t_0) \left[\exp(-i(\omega_r + i\omega_i)T) - \exp(-i(\omega_r + i\omega_i)(-T))\right] \tag{9.7}$$
$$= \frac{A_0 B_0}{-2i\omega} \exp(-2i\omega_r t_0) \exp(-2ii\omega_i t_0) \left[\exp(-i\omega_r T)\exp(\omega_i T) - \exp(-i\omega_r(-T))\exp(\omega_i(-T))\right] \tag{9.8}$$
$$= \frac{A_0 B_0}{-2i\omega} \exp(-2i\omega_r t_0) \exp(2\omega_i t_0) \left[\exp(\omega_i T) - \exp(-\omega_i T)\right] \tag{9.9}$$

被積分項第２項の積分は、$\omega - \omega^* \neq 0$ の条件で、

$$\int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} A^*(t)B(t)\mathrm{d}t \tag{9.10}$$
$$= \int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} {A_0}^* \exp(i\omega^* t) B_0 \exp(-i\omega t)\mathrm{d}t \tag{9.11}$$
$$= {A_0}^* B_0 \int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} \exp(i(-\omega + \omega^*)t)\mathrm{d}t \tag{9.12}$$
$$= \frac{{A_0}^* B_0}{i(-\omega + \omega^*)} \left[\exp(i((-\omega) - (-\omega)^*)t)\right]_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} \tag{9.13}$$
$$= \frac{{A_0}^* B_0}{i(-\omega + \omega^*)} \left[\exp(i((-\omega) - (-\omega)^*)(t_0+T/2)) - \exp(i((-\omega) - (-\omega)^*)(t_0-T/2))\right] \tag{9.14}$$
$$= \frac{{A_0}^* B_0}{i(-\omega + \omega^*)} \exp(i((-\omega) - (-\omega)^*)t_0) \left[\exp(i((-\omega) - (-\omega)^*)(T/2)) - \exp(i((-\omega) - (-\omega)^*)(-T/2))\right] \tag{9.15}$$
$$= \frac{{A_0}^* B_0}{i(-\omega + \omega^*)} \exp(i(2i(-\omega_i))t_0) \left[\exp(i(2i(-\omega_i))(T/2)) - \exp(i(2i(-\omega_i))(-T/2))\right] \tag{9.16}$$
$$= \frac{{A_0}^* B_0}{i(\omega^* - \omega)} \exp(2\omega_i t_0) \left[\exp(\omega_i T) - \exp(-\omega_i T)\right] \tag{9.17}$$

被積分項第３項の積分は、$(-\omega)-(-\omega)^* \neq 0$ の条件で、

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} A(t)B^*(t)\mathrm{d}t \\
=\ & \int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} A_0\exp(i(-\omega)t){B_0}^*\exp(-i(-\omega)^*t)\mathrm{d}t \\
=\ & A_0{B_0}^*\int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2}\exp(i((-\omega)-(-\omega)^*)t)\mathrm{d}t \\
=\ & \frac{A_0{B_0}^*}{i((-\omega)-(-\omega)^*)}\left[\exp(i((-\omega)-(-\omega)^*)t)\right]_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} \\
=\ & \frac{A_0{B_0}^*}{i((-\omega)-(-\omega)^*)}\left[\exp(i((-\omega)-(-\omega)^*)(t_0+T/2))-\exp(i((-\omega)-(-\omega)^*)(t_0-T/2))\right] \\
=\ & \frac{A_0{B_0}^*}{i((-\omega)-(-\omega)^*)}\exp(i((-\omega)-(-\omega)^*)t_0)\left[\exp(i((-\omega)-(-\omega)^*)(T/2))-\exp(i((-\omega)-(-\omega)^*)(-T/2))\right] \\
=\ & \frac{A_0{B_0}^*}{i((-\omega)-(-\omega)^*)}\exp(i(2i(-\omega_i))t_0)\left[\exp(i(2i(-\omega_i))(T/2))-\exp(i(2i(-\omega_i))(-T/2))\right] \\
=\ & \frac{A_0{B_0}^*}{i(-\omega+\omega^*)}\exp(2\omega_i t_0)\left[\exp(\omega_i T)-\exp(-\omega_i T)\right]
\end{aligned}
$$

被積分項第４項の積分は、$\exp(i(-\omega_r)T)=1$、$\exp(i(-\omega_r)(-T))=1$ であることに注意して、

$$
\begin{aligned}
&\int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} A^*(t)B^*(t)\mathrm{d}t \\
=\ & \int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} {A_0}^*\exp(-i(-\omega)^*t){B_0}^*\exp(-i(-\omega)^*t)\mathrm{d}t \\
=\ & {A_0}^*{B_0}^*\int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2}\exp(-2i(-\omega)^*t)\mathrm{d}t \\
=\ & \frac{{A_0}^*{B_0}^*}{-2i(-\omega)^*}\left[\exp(-2i(-\omega)^*t)\right]_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} \\
=\ & \frac{{A_0}^*{B_0}^*}{-2i(-\omega)^*}\left[\exp(-2i(-\omega)^*(t_0+T/2))-\exp(-2i(-\omega)^*(t_0-T/2))\right] \\
=\ & \frac{{A_0}^*{B_0}^*}{-2i(-\omega)^*}\exp(-2i(-\omega)^*t_0)\left[\exp(-i(-\omega)^*T)-\exp(-i(-\omega)^*(-T))\right] \\
=\ & \frac{{A_0}^*{B_0}^*}{-2i(-\omega)^*}\exp(-2i((-\omega_r)-i(-\omega_i))t_0)\left[\exp(-i((-\omega_r)-i(-\omega_i))T)-\exp(-i((-\omega_r)-i(-\omega_i))(-T))\right] \\
=\ & \frac{{A_0}^*{B_0}^*}{-2i(-\omega)^*}\exp(2i\omega_r t_0)\exp(2\omega_i t_0)\left[\exp(-i(-\omega_r)T)\exp(-(-\omega_i)T)-\exp(-i(-\omega_r)(-T))\exp(-(-\omega_i)(-T))\right] \\
=\ & \frac{{A_0}^*{B_0}^*}{2i\omega^*}\exp(2i\omega_r t_0)\exp(2\omega_i t_0)\left[\exp(\omega_i T)-\exp(-\omega_i T)\right]
\end{aligned}
$$

元の式に代入して、

$$\frac{1}{T}\int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2}\frac{A(t)+A^*(t)}{2}\frac{B(t)+B^*(t)}{2}\mathrm{d}t \tag{9.18}$$
$$=\frac{1}{4T}\left[\frac{A_0B_0}{-2i\omega}\exp(-2i\omega_r t_0)+\frac{{A_0}^*B_0}{i(-\omega+\omega^*)}+\frac{A_0{B_0}^*}{i(-\omega+\omega^*)}+\frac{{A_0}^*{B_0}^*}{2i\omega^*}\exp(2i\omega_r t_0)\right] \tag{9.19}$$
$$\times\left[\exp(\omega_i T)-\exp(-\omega_i T)\right]\exp(2\omega_i t_0) \tag{9.20}$$
$$=\frac{1}{4T}\left[\frac{A_0B_0}{-2i\omega}\exp(-2i\omega_r t_0)+\frac{{A_0}^*B_0+A_0{B_0}^*}{i(-\omega+\omega^*)}+\frac{{A_0}^*{B_0}^*}{2i\omega^*}\exp(2i\omega_r t_0)\right] \tag{9.21}$$
$$\times\left[\exp(\omega_i T)-\exp(-\omega_i T)\right]\exp(2\omega_i t_0) \tag{9.22}$$

特に、$|\omega_r|\gg|\omega_i|$ の場合は、$|\omega_r|=|2\pi/T|\gg|\omega_i|$ であるから、

$$\frac{1}{T}\int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2}\frac{A(t)+A^*(t)}{2}\frac{B(t)+B^*(t)}{2}\mathrm{d}t \tag{9.23}$$
$$=\frac{1}{4T}\left[\frac{A_0B_0}{-2i\omega}\exp(-2i\omega_r t_0)+\frac{{A_0}^*B_0+A_0{B_0}^*}{i(-\omega+\omega^*)}+\frac{{A_0}^*{B_0}^*}{2i\omega^*}\exp(2i\omega_r t_0)\right] \tag{9.24}$$
$$\times\left[\exp(\omega_i T)-\exp(-\omega_i T)\right]\exp(2\omega_i t_0) \tag{9.25}$$
$$\cong\frac{1}{4T}\left[\frac{A_0B_0}{-2i\omega}\exp(-2i\omega_r t_0)+\frac{{A_0}^*B_0+A_0{B_0}^*}{i(-2i\omega_i)}+\frac{{A_0}^*{B_0}^*}{2i\omega^*}\exp(2i\omega_r t_0)\right] \tag{9.26}$$
$$\times\left[(1+\omega_i T)-(1+(-\omega_i T))\right]\exp(2\omega_i t_0) \tag{9.27}$$
$$=\frac{\omega_i}{2}\left[\frac{A_0B_0}{-2i\omega}\exp(-2i\omega_r t_0)+\frac{{A_0}^*B_0+A_0{B_0}^*}{2\omega_i}+\frac{{A_0}^*{B_0}^*}{2i\omega^*}\exp(2i\omega_r t_0)\right]\exp(2\omega_i t_0) \tag{9.28}$$

さらに、$|\omega_r|\gg|\omega_i|$ を仮定しているから、$[\cdots]$ 内の第１項、第３項が第２項と比して無視できる。

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{T}\int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2}\frac{A(t)+A^*(t)}{2}\frac{B(t)+B^*(t)}{2}\mathrm{d}t\\
&\cong \frac{{A_0}^*B_0+A_0{B_0}^*}{4}\exp(2\omega_i t_0)\\
&= \frac{{A_0}^*B_0+A_0{B_0}^*}{4}\exp(-i(\omega_r+i\omega_i)t_0)\exp(i(\omega_r-i\omega_i)t_0)\\
&= \frac{A^*(t_0)B(t_0)+A(t_0)B^*(t_0)}{4}\\
&= \frac{\Re(A^*(t_0)B(t_0))}{2}
\end{aligned}$$

上式は $|\omega_r|\gg|\omega_i|$、かつ、$|((-\omega)-(-\omega)^*)|=2|-\omega_i|\neq 0$ の場合に成立する。

一方、$\omega_i=0$ である場合は、被積分項の第２，３項目の計算ができないので、別途計算する。被積分項第２項の積分は、$\omega-\omega^*=0$ の場合で、

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2}A^*(t)B(t)\mathrm{d}t\\
&= \int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2}{A_0}^*\exp(i\omega^*t)B_0\exp(-i\omega t)\mathrm{d}t\\
&= {A_0}^*B_0\int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2}\mathrm{d}t\\
&= {A_0}^*B_0T
\end{aligned}$$

同様に、被積分項第３項の積分は、$\omega - \omega^* = 0$ の場合で、

$$\begin{aligned}
&\int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} A(t)B^*(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} A_0 \exp(-i\omega t) {B_0}^* \exp(i\omega^* t)\mathrm{d}t \\
&= A_0 {B_0}^* \int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} \mathrm{d}t \\
&= A_0 {B_0}^* T
\end{aligned}$$

また、被積分項の第１，４項は、$\exp(\omega_i T) - \exp(-\omega_i T)$ が存在していることにより、0 である。したがって、元の式に代入すると、

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{T}\int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} \frac{A(t)+A^*(t)}{2}\frac{B(t)+B^*(t)}{2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4T}\int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} (A(t)B(t)+A^*(t)B(t)+A^*(t)B(t)+A^*(t)B^*(t))\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4T}({A_0}^* B_0 T + A_0 {B_0}^* T) \\
&= \frac{1}{4}({A_0}^* B_0 + A_0 {B_0}^*) \\
&= \frac{1}{4}({A_0}^* B_0 + A_0 {B_0}^*) \exp(-i\omega t_0)\exp(i\omega^* t_0) \\
&= \frac{\Re(A^*(t_0)B(t_0))}{2}
\end{aligned}$$

結局、$|\omega_r| \gg |\omega_i|$ の場合は、ω_i がゼロ、非ゼロに関係なく

$$\boxed{\frac{1}{T}\int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} \frac{A(t)+A^*(t)}{2}\frac{B(t)+B^*(t)}{2}\mathrm{d}t \cong \frac{\Re(A^*(t_0)B(t_0))}{2} = \frac{A^*(t_0)B(t_0)+A(t_0)B^*(t_0)}{4}} \tag{9.29}$$

が成立する。

9.1.1 複数の波がある場合

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left[\Re\left\{\boldsymbol{A}_1 \exp\left\{i(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\right\} + \boldsymbol{A}_2 \exp\left\{i(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\right\}\right\}\right. \\
&\left.\cdot\Re\left\{\boldsymbol{B}_1 \exp\left\{i(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\right\} + \boldsymbol{B}_2 \exp\left\{i(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\right\}\right\}\right]\mathrm{d}t \\
=&\int_0^T \left[\frac{\boldsymbol{A}_1 \exp\left\{i(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\right\} + \boldsymbol{A}_2 \exp\left\{i(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\right\}}{2} + \frac{\boldsymbol{A}_1^* \exp\left\{-i(\boldsymbol{k}_1^*\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\right\} + \boldsymbol{A}_2^* \exp\left\{-i(\boldsymbol{k}_2^*\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\right\}}{2}\right] \\
&\cdot\left[\frac{\boldsymbol{B}_1 \exp\left\{i(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\right\} + \boldsymbol{B}_2 \exp\left\{i(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\right\}}{2} + \frac{\boldsymbol{B}_1^* \exp\left\{-i(\boldsymbol{k}_1^*\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\right\} + \boldsymbol{B}_2^* \exp\left\{-i(\boldsymbol{k}_2^*\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\right\}}{2}\right]\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

簡単のため、周波数と波数は実数とする。

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \left[\frac{\boldsymbol{A}_1 \exp\{i(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\}+\boldsymbol{A}_2 \exp\{i(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\}}{2}+\frac{\boldsymbol{A}_1^* \exp\{-i(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\}+\boldsymbol{A}_2^* \exp\{-i(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\}}{2}\right]\\
&\cdot\left[\frac{\boldsymbol{B}_1 \exp\{i(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\}+\boldsymbol{B}_2 \exp\{i(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\}}{2}+\frac{\boldsymbol{B}_1^* \exp\{-i(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\}+\boldsymbol{B}_2^* \exp\{-i(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\}}{2}\right]\mathrm{d}t\\
=&\int_0^T \left[\frac{\boldsymbol{A}_1 \exp\{i(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\}+\boldsymbol{A}_2 \exp\{i(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\}}{2}+\frac{\boldsymbol{A}_1^* \exp\{-i(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\}+\boldsymbol{A}_2^* \exp\{-i(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\}}{2}\right]\\
&\cdot\left[\frac{\boldsymbol{B}_1 \exp\{i(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\}+\boldsymbol{B}_2 \exp\{i(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\}}{2}+\frac{\boldsymbol{B}_1^* \exp\{-i(\boldsymbol{k}_1\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\}+\boldsymbol{B}_2^* \exp\{-i(\boldsymbol{k}_2\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)\}}{2}\right]\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

9.2 $\{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\}\times\{\nabla\times\boldsymbol{C}(\boldsymbol{r})\}-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{r})\nabla\cdot\{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\}$ について

$\boldsymbol{A}$ を位置 $\boldsymbol{r}$ に依存しないテンソルとする。

$$
\{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\}\times\{\nabla\times\boldsymbol{C}(\boldsymbol{r})\}-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{r})\nabla\cdot\{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\} \tag{9.30}
$$

$$
=\begin{pmatrix}\sum_k A_{Xk}B_k\\ \sum_k A_{Yk}B_k\\ \sum_k A_{Zk}B_k\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}\dfrac{\partial C_Z}{\partial Y}-\dfrac{\partial C_Y}{\partial Z}\\ \dfrac{\partial C_X}{\partial Z}-\dfrac{\partial C_Z}{\partial X}\\ \dfrac{\partial C_Y}{\partial X}-\dfrac{\partial C_X}{\partial Y}\end{pmatrix}-\boldsymbol{C}(\boldsymbol{r})\sum_{k,l}A_{lk}\frac{\partial B_k}{\partial r_l} \tag{9.31}
$$

$$
\begin{aligned}
=&\begin{pmatrix}\sum_k\left[A_{Yk}B_k\left(\dfrac{\partial C_Y}{\partial X}-\dfrac{\partial C_X}{\partial Y}\right)-A_{Zk}B_k\left(\dfrac{\partial C_X}{\partial Z}-\dfrac{\partial C_Z}{\partial X}\right)\right]\\ \sum_k\left[A_{Zk}B_k\left(\dfrac{\partial C_Z}{\partial Y}-\dfrac{\partial C_Y}{\partial Z}\right)-A_{Xk}B_k\left(\dfrac{\partial C_Y}{\partial X}-\dfrac{\partial C_X}{\partial Y}\right)\right]\\ \sum_k\left[A_{Xk}B_k\left(\dfrac{\partial C_X}{\partial Z}-\dfrac{\partial C_Z}{\partial X}\right)-A_{Yk}B_k\left(\dfrac{\partial C_Z}{\partial Y}-\dfrac{\partial C_Y}{\partial Z}\right)\right]\end{pmatrix}\\
&-\begin{pmatrix}\sum_k\left[C_XA_{Xk}\dfrac{\partial B_k}{\partial X}+C_XA_{Yk}\dfrac{\partial B_k}{\partial Y}+C_XA_{Zk}\dfrac{\partial B_k}{\partial Z}\right]\\ \sum_k\left[C_YA_{Xk}\dfrac{\partial B_k}{\partial X}+C_YA_{Yk}\dfrac{\partial B_k}{\partial Y}+C_YA_{Zk}\dfrac{\partial B_k}{\partial Z}\right]\\ \sum_k\left[C_ZA_{Xk}\dfrac{\partial B_k}{\partial X}+C_ZA_{Yk}\dfrac{\partial B_k}{\partial Y}+C_ZA_{Zk}\dfrac{\partial B_k}{\partial Z}\right]\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{9.32}
$$

$$
\begin{aligned}
=&\begin{pmatrix}\sum_k\left[A_{Yk}\left(B_k\dfrac{\partial C_Y}{\partial X}-B_k\dfrac{\partial C_X}{\partial Y}\right)-A_{Zk}\left(B_k\dfrac{\partial C_X}{\partial Z}-B_k\dfrac{\partial C_Z}{\partial X}\right)\right]\\ \sum_k\left[A_{Zk}\left(B_k\dfrac{\partial C_Z}{\partial Y}-B_k\dfrac{\partial C_Y}{\partial Z}\right)-A_{Xk}\left(B_k\dfrac{\partial C_Y}{\partial X}-B_k\dfrac{\partial C_X}{\partial Y}\right)\right]\\ \sum_k\left[A_{Xk}\left(B_k\dfrac{\partial C_X}{\partial Z}-B_k\dfrac{\partial C_Z}{\partial X}\right)-A_{Yk}\left(B_k\dfrac{\partial C_Z}{\partial Y}-B_k\dfrac{\partial C_Y}{\partial Z}\right)\right]\end{pmatrix}\\
&-\begin{pmatrix}\sum_k\left[A_{Xk}C_X\dfrac{\partial B_k}{\partial X}+A_{Yk}C_X\dfrac{\partial B_k}{\partial Y}+A_{Zk}C_X\dfrac{\partial B_k}{\partial Z}\right]\\ \sum_k\left[A_{Xk}C_Y\dfrac{\partial B_k}{\partial X}+A_{Yk}C_Y\dfrac{\partial B_k}{\partial Y}+A_{Zk}C_Y\dfrac{\partial B_k}{\partial Z}\right]\\ \sum_k\left[A_{Xk}C_Z\dfrac{\partial B_k}{\partial X}+A_{Yk}C_Z\dfrac{\partial B_k}{\partial Y}+A_{Zk}C_Z\dfrac{\partial B_k}{\partial Z}\right]\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{9.33}
$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_k \left[A_{Yk} \left(B_k \frac{\partial C_Y}{\partial X} \right) + A_{Zk} \left(B_k \frac{\partial C_Z}{\partial X} \right) \right] \\ \sum_k \left[A_{Zk} \left(B_k \frac{\partial C_Z}{\partial Y} \right) + A_{Xk} \left(B_k \frac{\partial C_X}{\partial Y} \right) \right] \\ \sum_k \left[A_{Xk} \left(B_k \frac{\partial C_X}{\partial Z} \right) + A_{Yk} \left(B_k \frac{\partial C_Y}{\partial Z} \right) \right] \end{pmatrix}$$
$$- \begin{pmatrix} \sum_k \left[A_{Yk} \left(B_k \frac{\partial C_X}{\partial Y} + C_X \frac{\partial B_k}{\partial Y} \right) + A_{Zk} \left(B_k \frac{\partial C_X}{\partial Z} + C_X \frac{\partial B_k}{\partial Z} \right) \right] \\ \sum_k \left[A_{Zk} \left(B_k \frac{\partial C_Y}{\partial Z} + C_Y \frac{\partial B_k}{\partial Z} \right) + A_{Xk} \left(B_k \frac{\partial C_Y}{\partial X} + C_Y \frac{\partial B_k}{\partial X} \right) \right] \\ \sum_k \left[A_{Xk} \left(B_k \frac{\partial C_Z}{\partial X} + C_Z \frac{\partial B_k}{\partial X} \right) + A_{Yk} \left(B_k \frac{\partial C_Z}{\partial Y} + C_Z \frac{\partial B_k}{\partial Y} \right) \right] \end{pmatrix}$$
$$- \begin{pmatrix} \sum_k \left[A_{Xk} C_X \frac{\partial B_k}{\partial X} \right] \\ \sum_k \left[+ A_{Yk} C_Y \frac{\partial B_k}{\partial Y} \right] \\ \sum_k \left[+ A_{Zk} C_Z \frac{\partial B_k}{\partial Z} \right] \end{pmatrix} \tag{9.34}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_k B_k \left[A_{Yk} \frac{\partial C_Y}{\partial X} + A_{Zk} \frac{\partial C_Z}{\partial X} \right] \\ \sum_k B_k \left[A_{Zk} \frac{\partial C_Z}{\partial Y} + A_{Xk} \frac{\partial C_X}{\partial Y} \right] \\ \sum_k B_k \left[A_{Xk} \frac{\partial C_X}{\partial Z} + A_{Yk} \frac{\partial C_Y}{\partial Z} \right] \end{pmatrix}$$
$$- \begin{pmatrix} \sum_k \left[A_{Yk} \frac{\partial B_k C_X}{\partial Y} + A_{Zk} \frac{\partial B_k C_X}{\partial Z} \right] \\ \sum_k \left[A_{Zk} \frac{\partial B_k C_Y}{\partial Z} + A_{Xk} \frac{\partial B_k C_Y}{\partial X} \right] \\ \sum_k \left[A_{Xk} \frac{\partial B_k C_Z}{\partial X} + A_{Yk} \frac{\partial B_k C_Z}{\partial Y} \right] \end{pmatrix}$$
$$- \begin{pmatrix} \sum_k A_{Xk} C_X \frac{\partial B_k}{\partial X} \\ \sum_k A_{Yk} C_Y \frac{\partial B_k}{\partial Y} \\ \sum_k A_{Zk} C_Z \frac{\partial B_k}{\partial Z} \end{pmatrix} \tag{9.35}$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_k B_k \left[A_{Yk} \frac{\partial C_Y}{\partial X} + A_{Zk} \frac{\partial C_Z}{\partial X} + A_{Xk} \frac{\partial C_X}{\partial X} \right] \\ \sum_k B_k \left[A_{Zk} \frac{\partial C_Z}{\partial Y} + A_{Xk} \frac{\partial C_X}{\partial Y} + A_{Yk} \frac{\partial C_Y}{\partial Y} \right] \\ \sum_k B_k \left[A_{Xk} \frac{\partial C_X}{\partial Z} + A_{Yk} \frac{\partial C_Y}{\partial Z} + A_{Zk} \frac{\partial C_Z}{\partial Z} \right] \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sum_k B_k A_{Xk} \frac{\partial C_X}{\partial X} \\ \sum_k B_k A_{Yk} \frac{\partial C_Y}{\partial Y} \\ \sum_k B_k A_{Zk} \frac{\partial C_Z}{\partial Z} \end{pmatrix}$$
$$- \begin{pmatrix} \sum_k \left[A_{Yk} \frac{\partial B_k C_X}{\partial Y} + A_{Zk} \frac{\partial B_k C_X}{\partial Z} + A_{Xk} \frac{\partial B_k C_X}{\partial X} \right] \\ \sum_k \left[A_{Zk} \frac{\partial B_k C_Y}{\partial Z} + A_{Xk} \frac{\partial B_k C_Y}{\partial X} + A_{Yk} \frac{\partial B_k C_Y}{\partial Y} \right] \\ \sum_k \left[A_{Xk} \frac{\partial B_k C_Z}{\partial X} + A_{Yk} \frac{\partial B_k C_Z}{\partial Y} + A_{Zk} \frac{\partial B_k C_Z}{\partial Z} \right] \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_k \left[A_{Xk} \frac{\partial B_k C_X}{\partial X} \right] \\ \sum_k \left[A_{Yk} \frac{\partial B_k C_Y}{\partial Y} \right] \\ \sum_k \left[A_{Zk} \frac{\partial B_k C_Z}{\partial Z} \right] \end{pmatrix}$$
$$- \begin{pmatrix} \sum_k A_{Xk} C_X \frac{\partial B_k}{\partial X} \\ \sum_k A_{Yk} C_Y \frac{\partial B_k}{\partial Y} \\ \sum_k A_{Zk} C_Z \frac{\partial B_k}{\partial Z} \end{pmatrix} \tag{9.36}$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix}
\sum_k B_k \left[A_{Yk}\dfrac{\partial C_Y}{\partial X} + A_{Zk}\dfrac{\partial C_Z}{\partial X} + A_{Xk}\dfrac{\partial C_X}{\partial X} \right] \\
\sum_k B_k \left[A_{Zk}\dfrac{\partial C_Z}{\partial Y} + A_{Xk}\dfrac{\partial C_X}{\partial Y} + A_{Yk}\dfrac{\partial C_Y}{\partial Y} \right] \\
\sum_k B_k \left[A_{Xk}\dfrac{\partial C_X}{\partial Z} + A_{Yk}\dfrac{\partial C_Y}{\partial Z} + A_{Zk}\dfrac{\partial C_Z}{\partial Z} \right]
\end{pmatrix} \\
&\quad - \begin{pmatrix}
\sum_k \left[A_{Yk}\dfrac{\partial B_k C_X}{\partial Y} + A_{Zk}\dfrac{\partial B_k C_X}{\partial Z} + A_{Xk}\dfrac{\partial B_k C_X}{\partial X} \right] \\
\sum_k \left[A_{Zk}\dfrac{\partial B_k C_Y}{\partial Z} + A_{Xk}\dfrac{\partial B_k C_Y}{\partial X} + A_{Yk}\dfrac{\partial B_k C_Y}{\partial Y} \right] \\
\sum_k \left[A_{Xk}\dfrac{\partial B_k C_Z}{\partial X} + A_{Yk}\dfrac{\partial B_k C_Z}{\partial Y} + A_{Zk}\dfrac{\partial B_k C_Z}{\partial Z} \right]
\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{9.37}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix}
\sum_k \left[\dfrac{\partial C_Y}{\partial X} A_{Yk} B_k + \dfrac{\partial C_Z}{\partial X} A_{Zk} B_k + \dfrac{\partial C_X}{\partial X} A_{Xk} B_k \right] \\
\sum_k \left[\dfrac{\partial C_Z}{\partial Y} A_{Zk} B_k + \dfrac{\partial C_X}{\partial Y} A_{Xk} B_k + \dfrac{\partial C_Y}{\partial Y} A_{Yk} B_k \right] \\
\sum_k \left[\dfrac{\partial C_X}{\partial Z} A_{Xk} B_k + \dfrac{\partial C_Y}{\partial Z} A_{Yk} B_k + \dfrac{\partial C_Z}{\partial Z} A_{Zk} B_k \right]
\end{pmatrix} \\
&\quad - \begin{pmatrix}
\sum_k \left[\dfrac{\partial A_{Yk} B_k C_X}{\partial Y} + \dfrac{\partial A_{Zk} B_k C_X}{\partial Z} + \dfrac{\partial A_{Xk} B_k C_X}{\partial X} \right] \\
\sum_k \left[\dfrac{\partial A_{Zk} B_k C_Y}{\partial Z} + \dfrac{\partial A_{Xk} B_k C_Y}{\partial X} + \dfrac{\partial A_{Yk} B_k C_Y}{\partial Y} \right] \\
\sum_k \left[\dfrac{\partial A_{Xk} B_k C_Z}{\partial X} + \dfrac{\partial A_{Yk} B_k C_Z}{\partial Y} + \dfrac{\partial A_{Zk} B_k C_Z}{\partial Z} \right]
\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{9.38}
$$

テンソルの発散を、

$$
\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}
\dfrac{\partial A_{XX}}{\partial X} + \dfrac{\partial A_{XY}}{\partial Y} + \dfrac{\partial A_{XZ}}{\partial Z} \\
\dfrac{\partial A_{YX}}{\partial X} + \dfrac{\partial A_{YY}}{\partial Y} + \dfrac{\partial A_{YZ}}{\partial Z} \\
\dfrac{\partial A_{ZX}}{\partial X} + \dfrac{\partial A_{ZY}}{\partial Y} + \dfrac{\partial A_{ZZ}}{\partial Z}
\end{pmatrix} \tag{9.39}
$$

と定義する。なお、

$$
\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix}
\dfrac{\partial A_{XX}}{\partial X} + \dfrac{\partial A_{YX}}{\partial Y} + \dfrac{\partial A_{ZX}}{\partial Z} \\
\dfrac{\partial A_{XY}}{\partial X} + \dfrac{\partial A_{YY}}{\partial Y} + \dfrac{\partial A_{ZY}}{\partial Z} \\
\dfrac{\partial A_{XZ}}{\partial X} + \dfrac{\partial A_{YZ}}{\partial Y} + \dfrac{\partial A_{ZZ}}{\partial Z}
\end{pmatrix} \tag{9.40}
$$

という定義もあるらしい。

$$
\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial C_X}{\partial X} & \frac{\partial C_Y}{\partial X} & \frac{\partial C_Z}{\partial X} \\ \frac{\partial C_X}{\partial Y} & \frac{\partial C_Y}{\partial Y} & \frac{\partial C_Z}{\partial Y} \\ \frac{\partial C_X}{\partial Z} & \frac{\partial C_Y}{\partial Z} & \frac{\partial C_Z}{\partial Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_k A_{Xk} B_k \\ \sum_k A_{Yk} B_k \\ \sum_k A_{Zk} B_k \end{pmatrix} \\
&\quad - \nabla \cdot \begin{pmatrix} \sum_k A_{Xk} B_k C_X & \sum_k A_{Yk} B_k C_X & \sum_k A_{Zk} B_k C_X \\ \sum_k A_{Xk} B_k C_Y & \sum_k A_{Yk} B_k C_Y & \sum_k A_{Zk} B_k C_Y \\ \sum_k A_{Xk} B_k C_Z & \sum_k A_{Yk} B_k C_Z & \sum_k A_{Zk} B_k C_Z \end{pmatrix} \qquad (9.41)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \{\nabla \otimes \boldsymbol{C}(\boldsymbol{r})\} \cdot \{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\} \\
&\quad - \nabla \cdot \begin{pmatrix} C_X \\ C_Y \\ C_Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_k A_{Xk} B_k & \sum_k A_{Yk} B_k & \sum_k A_{Zk} B_k \end{pmatrix} \qquad (9.42)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \{\nabla \otimes \boldsymbol{C}(\boldsymbol{r})\} \cdot \{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\} \\
&\quad - \nabla \cdot \begin{pmatrix} C_X \\ C_Y \\ C_Z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{XX} & A_{XY} & A_{XZ} \\ A_{YX} & A_{YY} & A_{YZ} \\ A_{ZX} & A_{ZY} & A_{XZ} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_X \\ B_Y \\ B_Z \end{pmatrix} \qquad (9.43)
\end{aligned}
$$

$$
= \{\nabla \otimes \boldsymbol{C}(\boldsymbol{r})\} \cdot \{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\} - \nabla \cdot \{\boldsymbol{C}(\boldsymbol{r}) \otimes (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}))\} \qquad (9.44)
$$

すなわち、

$$
\boxed{\{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\} \times \{\nabla \times \boldsymbol{C}(\boldsymbol{r})\} - \boldsymbol{C}(\boldsymbol{r}) \nabla \cdot \{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\} = \{\nabla \otimes \boldsymbol{C}(\boldsymbol{r})\} \cdot \{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\} - \nabla \cdot [\boldsymbol{C}(\boldsymbol{r}) \otimes \{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\}]} \qquad (9.45)
$$

となる。

$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$(単位テンソル)、$\boldsymbol{C}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ である場合、

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \times \{\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\} - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) && (9.46) \\
&= \{\nabla \otimes \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\} \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) - \nabla \cdot [\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \otimes \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})] && (9.47) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial B_X}{\partial X} & \frac{\partial B_Y}{\partial X} & \frac{\partial B_Z}{\partial X} \\ \frac{\partial B_X}{\partial Y} & \frac{\partial B_Y}{\partial Y} & \frac{\partial B_Z}{\partial Y} \\ \frac{\partial B_X}{\partial Z} & \frac{\partial B_Y}{\partial Z} & \frac{\partial B_Z}{\partial Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_X \\ B_Y \\ B_Z \end{pmatrix} - \nabla \cdot [\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \otimes \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})] && (9.48) \\
&= \begin{pmatrix} B_X \frac{\partial B_X}{\partial X} + B_Y \frac{\partial B_Y}{\partial X} + B_Z \frac{\partial B_Z}{\partial X} \\ B_X \frac{\partial B_X}{\partial Y} + B_Y \frac{\partial B_Y}{\partial Y} + B_Z \frac{\partial B_Z}{\partial Y} \\ B_X \frac{\partial B_X}{\partial Z} + B_Y \frac{\partial B_Y}{\partial Z} + B_Z \frac{\partial B_Z}{\partial Z} \end{pmatrix} - \nabla \cdot [\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \otimes \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})] && (9.49) \\
&= \frac{1}{2} \nabla \cdot [\{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\} \boldsymbol{I}] - \nabla \cdot [\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \otimes \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})] && (9.50)
\end{aligned}
$$

すなわち、

$$
\boxed{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \times \{\nabla \times \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\} - \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \nabla \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{2} \nabla \cdot [\{\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\} \boldsymbol{I}] - \nabla \cdot [\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \otimes \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})]} \qquad (9.51)
$$

9.3 $\{\nabla \otimes \boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{r})\} \cdot \{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\}$ の複素共役との和について

$\boldsymbol{A}$ がエルミートテンソルである場合の

$$\{\nabla \otimes \boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{r})\} \cdot \{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\} \tag{9.52}$$

とその複素共役との和は、

$$\begin{aligned}
&\{\nabla \otimes \boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{r})\} \cdot \{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\} + \{\nabla \otimes \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\} \cdot \{\boldsymbol{A}^* \cdot \boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{r})\} && (9.53)\\
=&\begin{pmatrix} \frac{\partial B_X^*}{\partial X} & \frac{\partial B_Y^*}{\partial X} & \frac{\partial B_Z^*}{\partial X} \\ \frac{\partial B_X^*}{\partial Y} & \frac{\partial B_Y^*}{\partial Y} & \frac{\partial B_Z^*}{\partial Y} \\ \frac{\partial B_X^*}{\partial Z} & \frac{\partial B_Y^*}{\partial Z} & \frac{\partial B_Z^*}{\partial Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_k A_{Xk} B_k \\ \sum_k A_{Yk} B_k \\ \sum_k A_{Zk} B_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{\partial B_X}{\partial X} & \frac{\partial B_Y}{\partial X} & \frac{\partial B_Z}{\partial X} \\ \frac{\partial B_X}{\partial Y} & \frac{\partial B_Y}{\partial Y} & \frac{\partial B_Z}{\partial Y} \\ \frac{\partial B_X}{\partial Z} & \frac{\partial B_Y}{\partial Z} & \frac{\partial B_Z}{\partial Z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sum_k A_{Xk}^* B_k^* \\ \sum_k A_{Yk}^* B_k^* \\ \sum_k A_{Zk}^* B_k^* \end{pmatrix} && (9.54)\\
=&\begin{pmatrix} \sum_{k,l} \frac{\partial B_l^*}{\partial X} A_{lk} B_k \\ \sum_{k,l} \frac{\partial B_l^*}{\partial Y} A_{lk} B_k \\ \sum_{k,l} \frac{\partial B_l^*}{\partial Z} A_{lk} B_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{k,l} \frac{\partial B_k}{\partial X} A_{kl}^* B_l^* \\ \sum_{k,l} \frac{\partial B_k}{\partial Y} A_{kl}^* B_l^* \\ \sum_{k,l} \frac{\partial B_k}{\partial Z} A_{kl}^* B_l^* \end{pmatrix} && (9.55)\\
=&\begin{pmatrix} \sum_{k,l} \frac{\partial B_l^*}{\partial X} A_{lk} B_k \\ \sum_{k,l} \frac{\partial B_l^*}{\partial Y} A_{lk} B_k \\ \sum_{k,l} \frac{\partial B_l^*}{\partial Z} A_{lk} B_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sum_{k,l} \frac{\partial B_k}{\partial X} A_{lk} B_l^* \\ \sum_{k,l} \frac{\partial B_k}{\partial Y} A_{lk} B_l^* \\ \sum_{k,l} \frac{\partial B_k}{\partial Z} A_{lk} B_l^* \end{pmatrix} && (9.56)\\
=&\begin{pmatrix} \sum_{k,l} \frac{\partial}{\partial X} B_l^* A_{lk} B_k \\ \sum_{k,l} \frac{\partial}{\partial Y} B_l^* A_{lk} B_k \\ \sum_{k,l} \frac{\partial}{\partial Z} B_l^* A_{lk} B_k \end{pmatrix} && (9.57)\\
=&\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial X} \boldsymbol{A} : \boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{r}) \otimes \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \\ \frac{\partial}{\partial Y} \boldsymbol{A} : \boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{r}) \otimes \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \\ \frac{\partial}{\partial Z} \boldsymbol{A} : \boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{r}) \otimes \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) \end{pmatrix} && (9.58)\\
=&\nabla \cdot [\{\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{r}) \otimes \boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})\} \boldsymbol{I}] && (9.59)
\end{aligned}$$

9.4 $\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}\right)=\boldsymbol{B}\cdot\left(\boldsymbol{C}\otimes\boldsymbol{A}\right)$ について

$\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ をベクトルとする。

$$\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{C}\right) \tag{9.60}$$

$$=\begin{pmatrix} A_X\left(B_XC_X+B_YC_Y+B_ZC_Z\right) & A_Y\left(B_XC_X+B_YC_Y+B_ZC_Z\right) & A_Z\left(B_XC_X+B_YC_Y+B_ZC_Z\right)\end{pmatrix} \tag{9.61}$$

$$=\begin{pmatrix} B_X & B_Y & B_Z\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_XC_X & A_YC_X & A_ZC_X \\ A_XC_Y & A_YC_Y & A_ZC_Y \\ A_XC_Z & A_YC_Z & A_ZC_Z\end{pmatrix} \tag{9.62}$$

$$=\boldsymbol{B}\cdot\left(\boldsymbol{C}\otimes\boldsymbol{A}\right) \tag{9.63}$$

9.5 複素関数の微分について

テンソル $\boldsymbol{A}(a)$ の成分を $A_{jk}(a)$ とする。下記のとおり、テンソル $\boldsymbol{A}_H(a)$、$\boldsymbol{A}_A(a)$ を定義する。

$$A_{Hjk}(a)=\frac{A_{jk}(a)+A^*_{kj}(a)}{2} \tag{9.64}$$

$$A_{Ajk}(a)=\frac{A_{jk}(a)-A^*_{kj}(a)}{2i} \tag{9.65}$$

そうすると、

$$\boldsymbol{A}(a)=\boldsymbol{A}_H(a)+i\boldsymbol{A}_A(a) \tag{9.66}$$

が成り立つ。

また、

$$A^*_{Hjk}(a)=\frac{A^*_{jk}(a)+A_{kj}(a)}{2} \tag{9.67}$$

$$A^*_{Ajk}(a)=\frac{A^*_{jk}(a)-A_{kj}(a)}{-2i} \tag{9.68}$$

$$A^T_{Hjk}(a)=\frac{A_{kj}(a)+A^*_{jk}(a)}{2} \tag{9.69}$$

$$A^T_{Ajk}(a)=\frac{A_{kj}(a)-A^*_{jk}(a)}{2i} \tag{9.70}$$

が成り立つ。

随伴テンソルについては、

$$\boldsymbol{A}^T(a)^* \tag{9.71}$$

$$=\begin{pmatrix} A^*_{XX}(a) & A^*_{YX}(a) & A^*_{ZX}(a) \\ A^*_{XY}(a) & A^*_{YY}(a) & A^*_{ZY}(a) \\ A^*_{XZ}(a) & A^*_{YZ}(a) & A^*_{ZZ}(a) \end{pmatrix} \tag{9.72}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{A_{XX}(a)+A^*_{XX}(a)}{2} - i\frac{A_{XX}(a)-A^*_{XX}(a)}{2i} & \frac{A_{XY}(a)+A^*_{YX}(a)}{2} - i\frac{A_{XY}(a)-A^*_{YX}(a)}{2i} & A^*_{ZX}(a) \\ A^*_{XY}(a) & A^*_{YY}(a) & A^*_{ZY}(a) \\ A^*_{XZ}(a) & A^*_{YZ}(a) & A^*_{ZZ}(a) \end{pmatrix} \tag{9.73}$$

$$=\boldsymbol{A}_H(a) - i\boldsymbol{A}_A(a) \tag{9.74}$$

転置テンソルについては、

$$\boldsymbol{A}^T(a) \tag{9.75}$$

$$=\begin{pmatrix} A_{XX}(a) & A_{YX}(a) & A_{ZX}(a) \\ A_{XY}(a) & A_{YY}(a) & A_{ZY}(a) \\ A_{XZ}(a) & A_{YZ}(a) & A_{ZZ}(a) \end{pmatrix} \tag{9.76}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{A^*_{XX}(a)+A_{XX}(a)}{2} + i\frac{A^*_{XX}(a)-A_{XX}(a)}{-2i} & \frac{A^*_{XY}(a)+A_{YX}(a)}{2} + i\frac{A^*_{XY}(a)-A_{YX}(a)}{-2i} & A_{ZX}(a) \\ A_{XY}(a) & A_{YY}(a) & A_{ZY}(a) \\ A_{XZ}(a) & A_{YZ}(a) & A_{ZZ}(a) \end{pmatrix} \tag{9.77}$$

$$=\boldsymbol{A}^*_H(a) + i\boldsymbol{A}^*_A(a) \tag{9.78}$$

$$=\boldsymbol{A}^T_H(a) + i\boldsymbol{A}^T_A(a) \tag{9.79}$$

複素共役テンソルについては、

$$\boldsymbol{A}^*(a) \tag{9.80}$$

$$=\begin{pmatrix} A^*_{XX}(a) & A^*_{XY}(a) & A^*_{XZ}(a) \\ A^*_{YX}(a) & A^*_{YY}(a) & A^*_{YZ}(a) \\ A^*_{ZX}(a) & A^*_{ZY}(a) & A^*_{ZZ}(a) \end{pmatrix} \tag{9.81}$$

$$=\begin{pmatrix} \frac{A^*_{XX}(a)+A_{XX}(a)}{2} - i\frac{A^*_{XX}(a)-A_{XX}(a)}{-2i} & \frac{A^*_{XY}(a)+A_{YX}(a)}{2} - i\frac{A^*_{XY}(a)-A_{YX}(a)}{-2i} & A_{ZX}(a) \\ A_{XY}(a) & A_{YY}(a) & A_{ZY}(a) \\ A_{XZ}(a) & A_{YZ}(a) & A_{ZZ}(a) \end{pmatrix} \tag{9.82}$$

$$=\boldsymbol{A}^*_H(a) - i\boldsymbol{A}^*_A(a) \tag{9.83}$$

$$=\boldsymbol{A}^T_H(a) - i\boldsymbol{A}^T_A(a) \tag{9.84}$$

テンソルの微分は、

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}(a)}{\mathrm{d}a} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}_H(a)}{\mathrm{d}a} + i\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}_A(a)}{\mathrm{d}a} \tag{9.85}$$

これを成分で表すと、

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\boldsymbol{A}(a) && (9.86)\\
=&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\begin{pmatrix} A_{XX}(a) & A_{XY}(a) & A_{XZ}(a) \\ A_{YX}(a) & A_{YY}(a) & A_{YZ}(a) \\ A_{ZX}(a) & A_{ZY}(a) & A_{ZZ}(a) \end{pmatrix} && (9.87)\\
=&\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}A_{XX}(a)}{\mathrm{d}a} & \frac{\mathrm{d}A_{XY}(a)}{\mathrm{d}a} & \frac{\mathrm{d}A_{XZ}(a)}{\mathrm{d}a} \\ \frac{\mathrm{d}A_{YX}(a)}{\mathrm{d}a} & \frac{\mathrm{d}A_{YY}(a)}{\mathrm{d}a} & \frac{\mathrm{d}A_{YZ}(a)}{\mathrm{d}a} \\ \frac{\mathrm{d}A_{ZX}(a)}{\mathrm{d}a} & \frac{\mathrm{d}A_{ZY}(a)}{\mathrm{d}a} & \frac{\mathrm{d}A_{ZZ}(a)}{\mathrm{d}a} \end{pmatrix} && (9.88)\\
=&\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\frac{A_{XX}(a)+A^*_{XX}(a)}{2} & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\frac{A_{XY}(a)+A^*_{YX}(a)}{2} & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} && (9.89)\\
&+i\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\frac{A_{XX}(a)-A^*_{XX}(a)}{2i} & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\frac{A_{XY}(a)-A^*_{YX}(a)}{2i} & \\ & & \\ & & \end{pmatrix} && (9.90)\\
=&\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}A_{HXX}(a)}{\mathrm{d}a} & \frac{\mathrm{d}A_{HXY}(a)}{\mathrm{d}a} & \frac{\mathrm{d}A_{HXZ}(a)}{\mathrm{d}a} \\ \frac{\mathrm{d}A_{HYX}(a)}{\mathrm{d}a} & \frac{\mathrm{d}A_{HYY}(a)}{\mathrm{d}a} & \frac{\mathrm{d}A_{HYZ}(a)}{\mathrm{d}a} \\ \frac{\mathrm{d}A_{HZX}(a)}{\mathrm{d}a} & \frac{\mathrm{d}A_{HZY}(a)}{\mathrm{d}a} & \frac{\mathrm{d}A_{HZZ}(a)}{\mathrm{d}a} \end{pmatrix}+i\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}A_{AXX}(a)}{\mathrm{d}a} & \frac{\mathrm{d}A_{AXY}(a)}{\mathrm{d}a} & \frac{\mathrm{d}A_{AXZ}(a)}{\mathrm{d}a} \\ \frac{\mathrm{d}A_{AYX}(a)}{\mathrm{d}a} & \frac{\mathrm{d}A_{AYY}(a)}{\mathrm{d}a} & \frac{\mathrm{d}A_{AYZ}(a)}{\mathrm{d}a} \\ \frac{\mathrm{d}A_{AZX}(a)}{\mathrm{d}a} & \frac{\mathrm{d}A_{AZY}(a)}{\mathrm{d}a} & \frac{\mathrm{d}A_{AZZ}(a)}{\mathrm{d}a} \end{pmatrix} && (9.91)\\
=&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\boldsymbol{A}_H(a)+i\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\boldsymbol{A}_A(a) && (9.92)
\end{aligned}
$$

一方、随伴テンソルについては、

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\boldsymbol{A}^T(a)^* && (9.93)\\
=&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left\{\boldsymbol{A}_H(a)-i\boldsymbol{A}_A(a)\right\} && (9.94)\\
=&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\begin{pmatrix} \frac{A_{XX}(a)+A^*_{XX}(a)}{2}-i\frac{A_{XX}(a)-A^*_{XX}(a)}{2i} & \frac{A_{XY}(a)+A^*_{YX}(a)}{2}-i\frac{A_{XY}(a)-A^*_{YX}(a)}{2i} & A^*_{ZX}(a) \\ A^*_{XY}(a) & A^*_{YY}(a) & A^*_{ZY}(a) \\ A^*_{XZ}(a) & A^*_{YZ}(a) & A^*_{ZZ}(a) \end{pmatrix} && (9.95)\\
=&\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\begin{pmatrix} A^*_{XX}(a) & A^*_{YX}(a) & A^*_{ZX}(a) \\ A^*_{XY}(a) & A^*_{YY}(a) & A^*_{ZY}(a) \\ A^*_{XZ}(a) & A^*_{YZ}(a) & A^*_{ZZ}(a) \end{pmatrix} && (9.96)\\
& && (9.97)
\end{aligned}
$$

転置テンソルについては、

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\boldsymbol{A}^T(a) \tag{9.98}$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\begin{pmatrix} A_{XX}(a) & A_{YX}(a) & A_{ZX}(a) \\ A_{XY}(a) & A_{YY}(a) & A_{ZY}(a) \\ A_{XZ}(a) & A_{YZ}(a) & A_{ZZ}(a) \end{pmatrix} \tag{9.99}$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\begin{pmatrix} \frac{A^*_{XX}(a)+A_{XX}(a)}{2}+i\frac{A^*_{XX}(a)-A_{XX}(a)}{-2i} & \frac{A^*_{XY}(a)+A_{YX}(a)}{2}+i\frac{A^*_{XY}(a)-A_{YX}(a)}{-2i} & A_{ZX}(a) \\ A_{XY}(a) & A_{YY}(a) & A_{ZY}(a) \\ A_{XZ}(a) & A_{YZ}(a) & A_{ZZ}(a) \end{pmatrix} \tag{9.100}$$

$$=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(\boldsymbol{A}^*_H(a)+i\boldsymbol{A}^*_A(a)\right) \tag{9.101}$$

$$\boldsymbol{A}(a_r+ia_i) \tag{9.102}$$

$$=\begin{pmatrix} A_{XX}(a_r+ia_i) & A_{XY}(a_r+ia_i) & A_{XZ}(a_r+ia_i) \\ A_{YX}(a_r+ia_i) & A_{YY}(a_r+ia_i) & A_{YZ}(a_r+ia_i) \\ A_{ZX}(a_r+ia_i) & A_{ZY}(a_r+ia_i) & A_{ZZ}(a_r+ia_i) \end{pmatrix} \tag{9.103}$$

$$=\begin{pmatrix} A_{XX}(a_r)+\frac{\mathrm{d}A_{XX}(a_r)}{\mathrm{d}a}ia_i & A_{XY}(a_r)+\frac{\mathrm{d}A_{XY}(a_r)}{\mathrm{d}a}ia_i & A_{XZ}(a_r)+\frac{\mathrm{d}A_{XZ}(a_r)}{\mathrm{d}a}ia_i \\ A_{YX}(a_r)+\frac{\mathrm{d}A_{YX}(a_r)}{\mathrm{d}a}ia_i & A_{YY}(a_r)+\frac{\mathrm{d}A_{YY}(a_r)}{\mathrm{d}a}ia_i & A_{YZ}(a_r)+\frac{\mathrm{d}A_{YZ}(a_r)}{\mathrm{d}a}ia_i \\ A_{ZX}(a_r)+\frac{\mathrm{d}A_{ZX}(a_r)}{\mathrm{d}a}ia_i & A_{ZY}(a_r)+\frac{\mathrm{d}A_{ZY}(a_r)}{\mathrm{d}a}ia_i & A_{ZZ}(a_r)+\frac{\mathrm{d}A_{ZZ}(a_r)}{\mathrm{d}a}ia_i \end{pmatrix} \tag{9.104}$$

$$=\begin{pmatrix} A_{XX}(a_r) & A_{XY}(a_r) & A_{XZ}(a_r) \\ A_{YX}(a_r) & A_{YY}(a_r) & A_{YZ}(a_r) \\ A_{ZX}(a_r) & A_{ZY}(a_r) & A_{ZZ}(a_r) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}A_{XX}(a_r)}{\mathrm{d}a} & \frac{\mathrm{d}A_{XY}(a_r)}{\mathrm{d}a} & \frac{\mathrm{d}A_{XZ}(a_r)}{\mathrm{d}a} \\ \frac{\mathrm{d}A_{YX}(a_r)}{\mathrm{d}a} & \frac{\mathrm{d}A_{YY}(a_r)}{\mathrm{d}a} & \frac{\mathrm{d}A_{YZ}(a_r)}{\mathrm{d}a} \\ \frac{\mathrm{d}A_{ZX}(a_r)}{\mathrm{d}a} & \frac{\mathrm{d}A_{ZY}(a_r)}{\mathrm{d}a} & \frac{\mathrm{d}A_{ZZ}(a_r)}{\mathrm{d}a} \end{pmatrix}ia_i \tag{9.105}$$

$$=\boldsymbol{A}(a_r)+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}(a_r)}{\mathrm{d}a}ia_i \tag{9.106}$$

$$=\{\boldsymbol{A}_H(a_r)+i\boldsymbol{A}_A(a_r)\}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\{\boldsymbol{A}_H(a_r)+i\boldsymbol{A}_A(a_r)\}ia_i \tag{9.107}$$

$$=\boldsymbol{A}_H(a_r)+i\boldsymbol{A}_A(a_r)+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}_H(a_r)}{\mathrm{d}a}ia_i-\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}_A(a_r)}{\mathrm{d}a}a_i \tag{9.108}$$

$$\left\{\boldsymbol{A}^T(a_r+ia_i)\right\}^* \tag{9.109}$$

$$=\begin{pmatrix} A^*_{XX}(a_r+ia_i) & A^*_{YX}(a_r+ia_i) & A^*_{YZ}(a_r+ia_i) \\ A^*_{XY}(a_r+ia_i) & A^*_{YY}(a_r+ia_i) & A^*_{ZY}(a_r+ia_i) \\ A^*_{XZ}(a_r+ia_i) & A^*_{YZ}(a_r+ia_i) & A^*_{ZZ}(a_r+ia_i) \end{pmatrix} \tag{9.110}$$

$$=\begin{pmatrix} A^*_{XX}(a_r)+\frac{\mathrm{d}A^*_{XX}(a_r)}{\mathrm{d}a}ia_i & A^*_{YX}(a_r)+\frac{\mathrm{d}A^*_{YX}(a_r)}{\mathrm{d}a}ia_i & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \tag{9.111}$$

$$=\{\boldsymbol{A}_H(a_r)-i\boldsymbol{A}_A(a_r)\}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\{\boldsymbol{A}_H(a_r)-i\boldsymbol{A}_A(a_r)\}ia_i \tag{9.112}$$

$$=\boldsymbol{A}_H(a_r)-i\boldsymbol{A}_A(a_r)+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}_H(a_r)}{\mathrm{d}a}ia_i+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}_A(a_r)}{\mathrm{d}a}a_i \tag{9.113}$$

例えば、

$$A(a) = (1+i)a^2 + (4+5i)a + 5 - 7i \tag{9.114}$$

とすると、

$$\begin{aligned}
A_r(a) &= \frac{A(a) + A^*(a)}{2} && (9.115)\\
&= \frac{\left\{(1+i)a^2 + (4+5i)a + 5 - 7i\right\} + \left\{(1-i)a^{*2} + (4-5i)a^* + 5 + 7i\right\}}{2} && (9.116)\\
A_i(a) &= \frac{A(a) - A^*(a)}{2i} && (9.117)\\
&= \frac{\left\{(1+i)a^2 + (4+5i)a + 5 - 7i\right\} - \left\{(1-i)a^{*2} + (4-5i)a^* + 5 + 7i\right\}}{2i} && (9.118)
\end{aligned}$$

$A(a) = A_r(a) + iA_i(a)$ となるが、上記のとおり $A_r(a)$ と $A_i(a)$ の中身には a^* を含んでいるため、$A_r(a)$ と $A_i(a)$ は a で微分することができない。ただし、a が実数の場合のみ微分できる。

$$\frac{\mathrm{d}A(a)}{\mathrm{d}a} = 2(1+i)a + (4+5i) \tag{9.119}$$

となるが、

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}A(a)}{\mathrm{d}a}\right._r &= \frac{\{2(1+i)a + (4+5i)\} + \{2(1-i)a^* + (4-5i)\}}{2} && (9.120)\\
\left.\frac{\mathrm{d}A(a)}{\mathrm{d}a}\right._i &= \frac{\{2(1+i)a + (4+5i)\} - \{2(1+i)a^* + (4+5i)\}}{2i} && (9.121)
\end{aligned}$$

以下は、a、b を実数とする。そうすると、

$$\begin{aligned}
A_r(a) &= \frac{\left\{(1+i)a^2 + (4+5i)a + 5 - 7i\right\} + \left\{(1-i)a^2 + (4-5i)a + 5 + 7i\right\}}{2} && (9.122)\\
&= a^2 + 4a + 5 && (9.123)\\
A_i(a) &= \frac{\left\{(1+i)a^2 + (4+5i)a + 5 - 7i\right\} - \left\{(1-i)a^2 + (4-5i)a + 5 + 7i\right\}}{2i} && (9.124)\\
&= \frac{\left\{2ia^2 + 10ia - 14i\right\}}{2i} && (9.125)\\
&= a^2 + 5a - 7 && (9.126)
\end{aligned}$$

また、

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}A_r(a)}{\mathrm{d}a} &= 2a + 4 && (9.127)\\
\frac{\mathrm{d}A_i(a)}{\mathrm{d}a} &= 2a + 5 && (9.128)
\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
A(a+bi) =& A_r(a+bi) + iA_i(a+bi) && (9.129)\\
\cong& \left\{A_r(a) + \frac{\mathrm{d}A_r(a)}{\mathrm{d}a}bi\right\} + i\left\{A_i(a) + \frac{\mathrm{d}A_i(a)}{\mathrm{d}a}bi\right\} && (9.130)\\
=& \left\{a^2 + 4a + 5 + (2a+4)bi\right\} + i\left\{a^2 + 5a - 7 + (2a+5)bi\right\} && (9.131)\\
=& (1+i)a^2 + (4+5i)a + (5-7i) + (2i-2)ab + (4i-5)b && (9.132)
\end{aligned}$$

実数成分と虚数成分とに分けなかった場合は、

$$A(a+bi) \cong A(a) + \frac{\mathrm{d}A(a)}{\mathrm{d}a}bi \tag{9.133}$$

$$=(1+i)a^2 + (4+5i)a + 5 - 7i + \{2(1+i)a + (4+5i)\}bi \tag{9.134}$$

$$=(1+i)a^2 + (4+5i)a + 5 - 7i + (2i-2)ab + (4i-5)b \tag{9.135}$$

$$\{A(a+bi)\}^* = (1-i)a^2 + (4-5i)a + 5 + 7i + (-2i-2)ab - (1-i)b^2 + (-4i-5)b \tag{9.136}$$

近似の場合、

$$\{A(a+bi)\}^* = \{A_r(a+bi) + iA_i(a+bi)\}^* \tag{9.137}$$

$$= \{A_r(a+bi)\}^* + \{iA_i(a+bi)\}^* \tag{9.138}$$

$$= A_r(a+bi) - iA_i(a+bi) \tag{9.139}$$

$$\cong \left\{A_r(a) + \frac{\mathrm{d}A_r(a)}{\mathrm{d}a}bi\right\} - i\left\{A_i(a) + \frac{\mathrm{d}A_i(a)}{\mathrm{d}a}bi\right\} \tag{9.140}$$

$$= \left\{a^2 + 4a + 5 + (2a+4)bi\right\} - i\left\{a^2 + 5a - 7 + (2a+5)bi\right\} \tag{9.141}$$

$$= (1-i)a^2 + (4-5i)a + (5+7i) + (2i+2)ab + (4i+5)b \tag{9.142}$$

これは、近似しなかった場合と一致しない。やり方を変えてみる。

$$\{A(a+bi)\}^* = \{A_r(a+bi) + iA_i(a+bi)\}^* \tag{9.143}$$

$$\cong \left[\left\{A_r(a) + \frac{\mathrm{d}A_r(a)}{\mathrm{d}a}bi\right\} + i\left\{A_i(a) + \frac{\mathrm{d}A_i(a)}{\mathrm{d}a}bi\right\}\right]^* \tag{9.144}$$

$$= \left\{A_r(a) + \frac{\mathrm{d}A_r(a)}{\mathrm{d}a}(-bi)\right\} - i\left\{A_i(a) + \frac{\mathrm{d}A_i(a)}{\mathrm{d}a}(-bi)\right\} \tag{9.145}$$

$$= \left\{(a^2 + 4a + 5) + (2a+4)(-bi)\right\} - i\left\{(a^2 + 5a - 7) + (2a+5)(-bi)\right\} \tag{9.146}$$

$$= (1-i)a^2 + (4-5i)a + (5+7i) + (-2i-2)ab + (-4i-5)b \tag{9.147}$$

これは、近似しなかった場合と一致する。

何がいけなかったのか考えてみる。

$$
\begin{aligned}
\{A(a+bi)\}^* =& \left[\frac{A(a+bi)+\{A(a+bi)\}^*}{2} + i\frac{A(a+bi)-\{A(a+bi)\}^*}{2i}\right]^* && (9.148)\\
=& \left[\frac{A(a+bi)+\{A(a+bi)\}^*}{2}\right]^* + \left[i\frac{A(a+bi)-\{A(a+bi)\}^*}{2i}\right]^* && (9.149)\\
=& \frac{\{A(a+bi)\}^*+A(a+bi)}{2} + (-i)\frac{\{A(a+bi)\}^*-A(a+bi)}{-2i} && (9.150)\\
=& \frac{\{A(a+bi)\}^*+A(a+bi)}{2} + (-i)\frac{A(a+bi)-\{A(a+bi)\}^*}{2i} && (9.151)\\
\cong& \frac{1}{2}\left[\{A(a)\}^* + \frac{\mathrm{d}\{A(a)\}^*}{\mathrm{d}a}bi + A(a) + \frac{\mathrm{d}A(a)}{\mathrm{d}a}bi\right] + (-i)\frac{1}{2i}\left[A(a) + \frac{\mathrm{d}A(a)}{\mathrm{d}a}bi - \{A(a)\}^* - \frac{\mathrm{d}\{A(a)\}^*}{\mathrm{d}a}bi\right] && (9.152)\\
=& \frac{1}{2}\left[\{A(a)\}^* + \frac{\mathrm{d}\{A(a)\}^*}{\mathrm{d}a}bi + A(a) + \frac{\mathrm{d}A(a)}{\mathrm{d}a}bi\right] - \frac{1}{2}\left[A(a) + \frac{\mathrm{d}A(a)}{\mathrm{d}a}bi - \{A(a)\}^* - \frac{\mathrm{d}\{A(a)\}^*}{\mathrm{d}a}bi\right] && (9.153)\\
=& \{A(a)\}^* + \frac{\mathrm{d}\{A(a)\}^*}{\mathrm{d}a}bi && (9.154)
\end{aligned}
$$

一方、

$$
\begin{aligned}
A(a+bi) =& \frac{A(a+bi)+\{A(a+bi)\}^*}{2} + i\frac{A(a+bi)-\{A(a+bi)\}^*}{2i} && (9.155)\\
\cong& \frac{1}{2}\left[A(a) + \frac{\mathrm{d}A(a)}{\mathrm{d}a}bi + \{A(a)\}^* + \frac{\mathrm{d}\{A(a)\}^*}{\mathrm{d}a}bi\right] + i\frac{1}{2i}\left[A(a) + \frac{\mathrm{d}A(a)}{\mathrm{d}a}bi - \{A(a)\}^* - \frac{\mathrm{d}\{A(a)\}^*}{\mathrm{d}a}bi\right] && (9.156)\\
=& \frac{1}{2}\left[A(a) + \frac{\mathrm{d}A(a)}{\mathrm{d}a}bi + \{A(a)\}^* + \frac{\mathrm{d}\{A(a)\}^*}{\mathrm{d}a}bi\right] + \frac{1}{2}\left[A(a) + \frac{\mathrm{d}A(a)}{\mathrm{d}a}bi - \{A(a)\}^* - \frac{\mathrm{d}\{A(a)\}^*}{\mathrm{d}a}bi\right] && (9.157)\\
=& A(a) + \frac{\mathrm{d}A(a)}{\mathrm{d}a}bi && (9.158)
\end{aligned}
$$

というわけで、

$$
\{A(a+bi)\}^* \cong \{A(a)\}^* + \frac{\mathrm{d}\{A(a)\}^*}{\mathrm{d}a}bi \qquad (9.159)
$$

とすることに問題がありそうである。そこで確認してみる。

$$
\begin{aligned}
& \{A(a)\}^* + \frac{\mathrm{d}\{A(a)\}^*}{\mathrm{d}a}bi && (9.160)\\
=& \{(1+i)a^2+(4+5i)a+5-7i\}^* + \frac{\mathrm{d}\{(1+i)a^2+(4+5i)a+5-7i\}^*}{\mathrm{d}a}bi && (9.161)\\
=& \{(1-i)a^2+(4-5i)a+5+7i\} + \frac{\mathrm{d}\{(1-i)a^2+(4-5i)a+5+7i\}}{\mathrm{d}a}bi && (9.162)\\
=& \{(1-i)a^2+(4-5i)a+5+7i\} + \{2(1-i)a+(4-5i)\}bi && (9.163)\\
=& (1-i)a^2+(4-5i)a+5+7i+2(i+1)ab+(4i+5)b && (9.164)
\end{aligned}
$$

確かに、近似になっていない。

9.5.0.0.1 複素共役の微分

$z = z_0$ における微分について考えてみる。

$$\lim_{h\to 0}\frac{(z+h)^*-z^*}{h} = \lim_{r\to 0}\frac{(z+re^{i\theta})^*-z^*}{re^{i\theta}} \tag{9.165}$$

$$= \lim_{r\to 0}\frac{z^*+re^{-i\theta}-z^*}{re^{i\theta}} \tag{9.166}$$

$$= e^{-2i\theta} \tag{9.167}$$

したがって、極限をとる方向 θ によって結果が変わるから微分不可能である。そのため、エルミートテンソルを微分することはできない。

9.5.0.0.2 それを踏まえて

$$\frac{\mathrm{d}A(a)}{\mathrm{d}a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left[\frac{A(a)+\{A(a)\}^*}{2}+i\frac{A(a)-\{A(a)\}^*}{2i}\right] \tag{9.168}$$

$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left[A_r(a)+iA_i(a)\right] \tag{9.169}$$

左辺は微分可能であり、右辺の複素共役の項はキャンセルされるから、上の式のようにするのは許されると思う。

9.6 回転行列について

x 軸周りに θ_x 回転させる回転行列は、

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x \end{pmatrix}$$

で与えられる。

y 軸周りに θ_y 回転させる回転行列は、

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{pmatrix}$$

で与えられる。

z 軸周りに θ_z 回転させる回転行列は、

$$\begin{pmatrix} \cos\theta_z & -\sin\theta_z & 0 \\ \sin\theta_z & \cos\theta_z & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

で与えられる。

したがって、これらの積は、

$$
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{pmatrix}
$$
$$
= \begin{pmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y \\ \sin\theta_x\sin\theta_y & \cos\theta_x & -\sin\theta_x\cos\theta_y \\ -\cos\theta_x\sin\theta_y & \sin\theta_x & \cos\theta_x\cos\theta_y \end{pmatrix}
$$

積の順番を変えると、

$$
\begin{pmatrix} \cos\theta_y & 0 & \sin\theta_y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta_y & 0 & \cos\theta_y \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x \\ 0 & \sin\theta_x & \cos\theta_x \end{pmatrix}
$$
$$
= \begin{pmatrix} \cos\theta_y & \sin\theta_y\sin\theta_x & \sin\theta_y\cos\theta_x \\ 0 & \cos\theta_x & -\sin\theta_x \\ -\sin\theta_y & \cos\theta_y\sin\theta_x & \cos\theta_x\cos\theta_y \end{pmatrix}
$$

つまり、回転の順番によって行列が変わる。
回転行列を $\boldsymbol{T}$ とする。回転により $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$ の点が、$(0, 0, 1)$ の点に来たとする。

$$
\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \boldsymbol{T} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}
$$
$$
\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \boldsymbol{T}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}
= \begin{pmatrix} T_{xz}^{-1} \\ T_{yz}^{-1} \\ T_{zz}^{-1} \end{pmatrix}
$$

極座標を用いると、

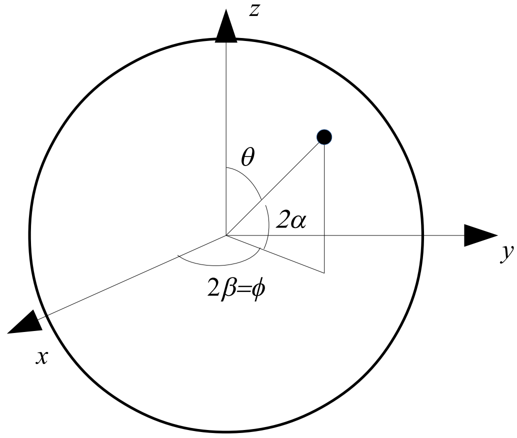
$$
\begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{xz}^{-1} \\ T_{yz}^{-1} \\ T_{zz}^{-1} \end{pmatrix}
$$

9.6.1 ポアンカレ球への適用

ポアンカレ球と極座標の間には、

$$2\beta = \phi$$

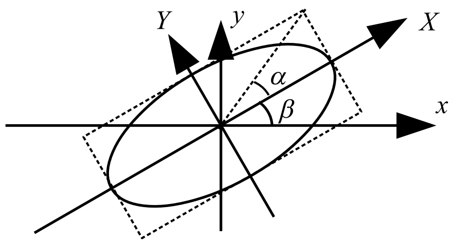
$$\theta + 2\alpha = \pi/2$$



の関係がある。
　したがって、上式は、

$$\begin{pmatrix} \cos 2\alpha \cos 2\beta \\ \cos 2\alpha \sin 2\beta \\ \sin 2\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{xz}^{-1} \\ T_{yz}^{-1} \\ T_{zz}^{-1} \end{pmatrix}$$

　xyz デカルト座標系を z 軸周りに β 回転させた座標系を XYZ 座標系とする。



$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{X}} = \cos\beta \hat{\boldsymbol{x}} + \sin\beta \hat{\boldsymbol{y}} \\ \hat{\boldsymbol{Y}} = -\sin\beta \hat{\boldsymbol{x}} + \cos\beta \hat{\boldsymbol{y}} \end{cases} \tag{9.170}$$

　X 軸を長軸、Y 軸を短軸とする楕円を描く電場の媒介変数表示は、

$$\begin{cases} \boldsymbol{E}_X = a\cos(\pm\omega t + \theta)\hat{\boldsymbol{X}} = a\dfrac{\exp(i\theta)\exp(\pm i\omega t) + \exp(-i\theta)\exp(\mp i\omega t)}{2}\hat{\boldsymbol{X}} \\ \boldsymbol{E}_Y = b\sin(\pm\omega t + \theta)\hat{\boldsymbol{Y}} = b\dfrac{\exp(i\theta)\exp(\pm i\omega t) - \exp(-i\theta)\exp(\mp i\omega t)}{2i}\hat{\boldsymbol{Y}} \\ b/a = \tan\alpha \end{cases} \tag{9.171}$$

ω の前のプラスマイナスは右回り、左回りを表す。
　ところで、xyz デカルト座標系における電場が

$$\boldsymbol{E} = \Re\{E_{x0}\exp(-i\omega t)\}\hat{\boldsymbol{x}} + \Re\{E_{y0}\exp(-i\omega t)\}\hat{\boldsymbol{y}}$$

の如くあらわされるとする。

$$\begin{pmatrix} E_X \\ E_Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{X}} \\ \boldsymbol{E}\cdot\hat{\boldsymbol{Y}} \end{pmatrix} \tag{9.172}$$

$$= \begin{pmatrix} \Re\left\{E_{x0}\exp(-i\omega t)\right\}\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\hat{\boldsymbol{X}} + \Re\left\{E_{y0}\exp(-i\omega t)\right\}\hat{\boldsymbol{y}}\cdot\hat{\boldsymbol{X}} \\ \Re\left\{E_{x0}\exp(-i\omega t)\right\}\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\hat{\boldsymbol{Y}} + \Re\left\{E_{y0}\exp(-i\omega t)\right\}\hat{\boldsymbol{y}}\cdot\hat{\boldsymbol{Y}} \end{pmatrix} \tag{9.173}$$

$$= \begin{pmatrix} \Re\left\{E_{x0}\exp(-i\omega t)\right\}\cos\beta + \Re\left\{E_{y0}\exp(-i\omega t)\right\}\sin\beta \\ -\Re\left\{E_{x0}\exp(-i\omega t)\right\}\sin\beta + \Re\left\{E_{y0}\exp(-i\omega t)\right\}\cos\beta \end{pmatrix} \tag{9.174}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{(E_{x0}\cos\beta + E_{y0}\sin\beta)\exp(-i\omega t) + ({E_{x0}}^*\cos\beta + {E_{y0}}^*\sin\beta)\exp(i\omega t)}{2} \\ \dfrac{(-E_{x0}\sin\beta + E_{y0}\cos\beta)\exp(-i\omega t) + (-{E_{x0}}^*\sin\beta + {E_{y0}}^*\cos\beta)\exp(i\omega t)}{2} \end{pmatrix} \tag{9.175}$$

比較して、

$$a\frac{\exp(i\theta)\exp(\pm i\omega t) + \exp(-i\theta)\exp(\mp i\omega t)}{2} = \frac{(E_{x0}\cos\beta + E_{y0}\sin\beta)\exp(-i\omega t) + ({E_{x0}}^*\cos\beta + {E_{y0}}^*\sin\beta)\exp(i\omega t)}{2} \tag{9.176}$$

$$b\frac{\exp(i\theta)\exp(\pm i\omega t) - \exp(-i\theta)\exp(\mp i\omega t)}{2i} = \frac{(-E_{x0}\sin\beta + E_{y0}\cos\beta)\exp(-i\omega t) + (-{E_{x0}}^*\sin\beta + {E_{y0}}^*\cos\beta)\exp(i\omega t)}{2} \tag{9.177}$$

右回りの場合、a, b は実数であることに注意して

$$\begin{cases} a\exp(-i\theta) = E_{x0}\cos\beta + E_{y0}\sin\beta \\ bi\exp(-i\theta) = -E_{x0}\sin\beta + E_{y0}\cos\beta \end{cases} \tag{9.178}$$

$\tan\alpha = b/a$ より、

$$\cos\alpha : \sin\alpha = \frac{E_{x0}\cos\beta + E_{y0}\sin\beta}{\exp(-i\theta)} : \frac{-E_{x0}\sin\beta + E_{y0}\cos\beta}{i\exp(-i\theta)} \tag{9.179}$$

$$= E_{x0}\cos\beta + E_{y0}\sin\beta : -i\left(-E_{x0}\sin\beta + E_{y0}\cos\beta\right) \tag{9.180}$$

$$\sin\alpha\left(E_{x0}\cos\beta + E_{y0}\sin\beta\right) = \cos\alpha\,(-i)\left(-E_{x0}\sin\beta + E_{y0}\cos\beta\right) \tag{9.181}$$

$$E_{x0}\sin\alpha\cos\beta + E_{y0}\sin\alpha\sin\beta = iE_{x0}\cos\alpha\sin\beta - iE_{y0}\cos\alpha\cos\beta \tag{9.182}$$

$$E_{x0}\left(\sin\alpha\cos\beta - i\cos\alpha\sin\beta\right) = E_{y0}\left(-i\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\right) \tag{9.183}$$

すなわち、

$$E_{x0} : E_{y0} = \left(-i\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\right) : \left(\sin\alpha\cos\beta - i\cos\alpha\sin\beta\right) \tag{9.184}$$

左回りの場合、同様にして、

$$\begin{cases} a\exp(i\theta) = E_{x0}\cos\beta + E_{y0}\sin\beta \\ -bi\exp(i\theta) = -E_{x0}\sin\beta + E_{y0}\cos\beta \end{cases} \tag{9.185}$$

$\tan\alpha = b/a$ より、

$$\cos\alpha : \sin\alpha = \frac{E_{x0}\cos\beta + E_{y0}\sin\beta}{\exp(i\theta)} : \frac{-E_{x0}\sin\beta + E_{y0}\cos\beta}{-i\exp(i\theta)} \tag{9.186}$$

$$= E_{x0}\cos\beta + E_{y0}\sin\beta : i\left(-E_{x0}\sin\beta + E_{y0}\cos\beta\right) \tag{9.187}$$

$$\sin\alpha\left(E_{x0}\cos\beta+E_{y0}\sin\beta\right)=\cos\alpha i\left(-E_{x0}\sin\beta+E_{y0}\cos\beta\right) \tag{9.188}$$

$$E_{x0}\sin\alpha\cos\beta+E_{y0}\sin\alpha\sin\beta=-iE_{x0}\cos\alpha\sin\beta+iE_{y0}\cos\alpha\cos\beta \tag{9.189}$$

$$E_{x0}\left(\sin\alpha\cos\beta+i\cos\alpha\sin\beta\right)=E_{y0}\left(i\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\right) \tag{9.190}$$

すなわち、

$$E_{x0}:E_{y0}=\left(i\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\right):\left(\sin\alpha\cos\beta+i\cos\alpha\sin\beta\right) \tag{9.191}$$

右回りと左回りをまとめて、

$$\boxed{E_{x0}:E_{y0}=\left(\mp i\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\right):\left(\sin\alpha\cos\beta\mp i\cos\alpha\sin\beta\right)} \tag{9.192}$$

直線偏波の場合、$\alpha=0$ または $\alpha=\pi/2$。例えば $\alpha=0$ とすると、

$$E_{x0}:E_{y0}=\mp i\cos\beta:\mp i\sin\beta=\cos\beta:\sin\beta \tag{9.193}$$

円偏波の場合、$\alpha=\pi/4$。

$$E_{x0}:E_{y0}=\left(\mp i\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\beta-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta\right):\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\beta\mp i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta\right) \tag{9.194}$$

$$=\left(\mp i\cos\beta-\sin\beta\right):\left(\cos\beta\mp i\sin\beta\right) \tag{9.195}$$

$$=\left(\mp i\cos\beta-\sin\beta\right):\pm i\left(\mp i\cos\beta-\sin\beta\right) \tag{9.196}$$

$$=1:\pm i \tag{9.197}$$

$\alpha=-\pi/4$ の場合は、

$$E_{x0}:E_{y0}=\left(\mp i\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\beta+\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta\right):\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\beta\mp i\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\beta\right) \tag{9.198}$$

$$=\left(\mp i\cos\beta+\sin\beta\right):\left(-\cos\beta\mp i\sin\beta\right) \tag{9.199}$$

$$=\left(\mp i\cos\beta+\sin\beta\right):\mp i\left(\mp i\cos\beta+\sin\beta\right) \tag{9.200}$$

$$=1:\mp i \tag{9.201}$$

ポアンカレ球における α、β のとりうる範囲は、

$$-\pi/2\le 2\alpha\le\pi/2$$

$$-\pi\le 2\beta<\pi$$

である。すなわち、

$$-\pi/4\le\alpha\le\pi/4$$

$$-\pi/2\le\beta<\pi/2$$

$$\begin{aligned}
\cos^2 2\alpha &= \{T_{xz}^{-1}\}^2+\{T_{yz}^{-1}\}^2\\
(2\cos^2\alpha-1)^2 &= \{T_{xz}^{-1}\}^2+\{T_{yz}^{-1}\}^2\\
2\cos^2\alpha-1 &= \pm\sqrt{\{T_{xz}^{-1}\}^2+\{T_{yz}^{-1}\}^2}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\sin 2\alpha &= T_{zz}^{-1} \\
2\sin\alpha\cos\alpha &= T_{zz}^{-1} \\
4\sin^2\alpha\cos^2\alpha &= \{T_{zz}^{-1}\}^2
\end{aligned}
$$

$$
\alpha = \frac{1}{2}\sin^{-1} T_{zz}^{-1}
$$

であるから、

$$
\begin{aligned}
\tan 2\beta &= \frac{T_{yz}^{-1}}{T_{xz}^{-1}} \\
\beta &= \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{T_{yz}^{-1}}{T_{xz}^{-1}}
\end{aligned}
$$

9.6.2 基準点の変更

$z = 0$ でなく、$z = z_0$ を偏波の基準点とすることを考える。

$$
\boldsymbol{E}(z,t) = \boldsymbol{E}_0 \exp\{i(kz - \omega t)\}
$$

の $\boldsymbol{E}_0$ を別の値で表すことを考える。

$$
\boldsymbol{E}(z_0,t) = \boldsymbol{E}_0 \exp\{i(kz_0 - \omega t)\} = \boldsymbol{E}_0' \exp(-i\omega t)
$$

であるから、

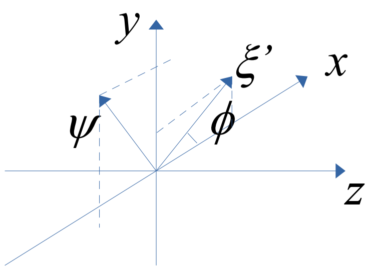
$$
\boldsymbol{E}_0 = \boldsymbol{E}_0' \exp(-ikz_0)
$$

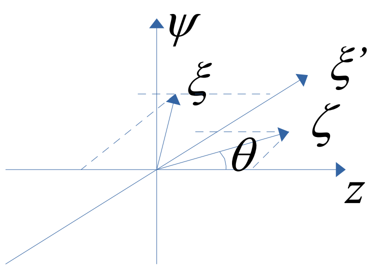
すなわち、

$$
\boldsymbol{E}(z,t) = \boldsymbol{E}_0' \exp(-ikz_0)\exp\{i(kz - \omega t)\}
$$

9.6.3 球座標系との関係

xyz 座標系において、z 軸周りに ϕ 回転した座標系を $\xi'\psi z$ 座標系とし、$\xi'\psi z$ 座標系を ψ 軸周りに θ 回転させた座標系を $\xi\psi\zeta$ 座標系とする。





$$\boldsymbol{A} = A_{\xi'}\hat{\boldsymbol{\xi}}' + A_\psi\hat{\boldsymbol{\psi}} + A_z\hat{\boldsymbol{z}} = A_x\hat{\boldsymbol{x}} + A_y\hat{\boldsymbol{y}} + A_z\hat{\boldsymbol{z}} \tag{9.202}$$

であるが、

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\xi}}' = \cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi\hat{\boldsymbol{y}} \\ \hat{\boldsymbol{\psi}} = -\sin\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\phi\hat{\boldsymbol{y}} \end{cases} \tag{9.203}$$

の関係があるから、

$$\begin{pmatrix} A_{\xi'} \\ A_\psi \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\hat{\boldsymbol{\xi}}' + A_y\hat{\boldsymbol{y}}\cdot\hat{\boldsymbol{\xi}}' + A_z\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{\xi}}' \\ A_x\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\hat{\boldsymbol{\psi}} + A_y\hat{\boldsymbol{y}}\cdot\hat{\boldsymbol{\psi}} + A_z\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{\psi}} \\ A_x\hat{\boldsymbol{x}}\cdot\hat{\boldsymbol{z}} + A_y\hat{\boldsymbol{y}}\cdot\hat{\boldsymbol{z}} + A_z\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{z}} \end{pmatrix} \tag{9.204}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \tag{9.205}$$

同じく、

$$\boldsymbol{A} = A_\xi\hat{\boldsymbol{\xi}} + A_\psi\hat{\boldsymbol{\psi}} + A_\zeta\hat{\boldsymbol{\zeta}} = A_{\xi'}\hat{\boldsymbol{\xi}}' + A_\psi\hat{\boldsymbol{\psi}} + A_z\hat{\boldsymbol{z}} \tag{9.206}$$

であるが、

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\xi}} = \cos\theta\hat{\boldsymbol{\xi}}' - \sin\theta\hat{\boldsymbol{z}} \\ \hat{\boldsymbol{\zeta}} = \sin\theta\hat{\boldsymbol{\xi}}' + \cos\theta\hat{\boldsymbol{z}} \end{cases} \tag{9.207}$$

の関係があるから、

$$\begin{pmatrix} A_\xi \\ A_\psi \\ A_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{\xi'}\hat{\boldsymbol{\xi}}'\cdot\hat{\boldsymbol{\xi}} + A_\psi\hat{\boldsymbol{\psi}}\cdot\hat{\boldsymbol{\xi}} + A_z\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{\xi}} \\ A_{\xi'}\hat{\boldsymbol{\xi}}'\cdot\hat{\boldsymbol{\psi}} + A_\psi\hat{\boldsymbol{\psi}}\cdot\hat{\boldsymbol{\psi}} + A_z\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{\psi}} \\ A_{\xi'}\hat{\boldsymbol{\xi}}'\cdot\hat{\boldsymbol{\zeta}} + A_\psi\hat{\boldsymbol{\psi}}\cdot\hat{\boldsymbol{\zeta}} + A_z\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\hat{\boldsymbol{\zeta}} \end{pmatrix} \tag{9.208}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{\xi'} \\ A_\psi \\ A_z \end{pmatrix} \tag{9.209}$$

したがって、

$$\begin{pmatrix} A_\xi \\ A_\psi \\ A_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{\xi'} \\ A_\psi \\ A_z \end{pmatrix} \tag{9.210}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \tag{9.211}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} \tag{9.212}$$

逆変換は、

$$\begin{pmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} A_\xi \\ A_\psi \\ A_\zeta \end{pmatrix} \tag{9.213}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\xi \\ A_\psi \\ A_\zeta \end{pmatrix} \tag{9.214}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\phi\cos\theta & -\sin\phi & \cos\phi\sin\theta \\ \sin\phi\cos\theta & \cos\phi & \sin\phi\sin\theta \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_\xi \\ A_\psi \\ A_\zeta \end{pmatrix} \tag{9.215}$$

また、

$$\hat{\boldsymbol{\xi}} = \cos\theta\hat{\boldsymbol{\xi}}' - \sin\theta\hat{\boldsymbol{z}} \tag{9.216}$$

$$= \cos\theta\left(\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi\hat{\boldsymbol{y}}\right) - \sin\theta\hat{\boldsymbol{z}} \tag{9.217}$$

$$= \cos\phi\cos\theta\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi\cos\theta\hat{\boldsymbol{y}} - \sin\theta\hat{\boldsymbol{z}} \tag{9.218}$$

$$\hat{\boldsymbol{\zeta}} = \sin\theta\hat{\boldsymbol{\xi}}' + \cos\theta\hat{\boldsymbol{z}} \tag{9.219}$$

$$= \sin\theta\left(\cos\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi\hat{\boldsymbol{y}}\right) + \cos\theta\hat{\boldsymbol{z}} \tag{9.220}$$

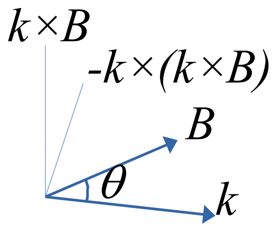
$$= \cos\phi\sin\theta\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi\sin\theta\hat{\boldsymbol{y}} + \cos\theta\hat{\boldsymbol{z}} \tag{9.221}$$

の関係から、

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{\xi}} = \cos\phi\cos\theta\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi\cos\theta\hat{\boldsymbol{y}} - \sin\theta\hat{\boldsymbol{z}} \\ \hat{\boldsymbol{\psi}} = -\sin\phi\hat{\boldsymbol{x}} + \cos\phi\hat{\boldsymbol{y}} \\ \hat{\boldsymbol{\zeta}} = \cos\phi\sin\theta\hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi\sin\theta\hat{\boldsymbol{y}} + \cos\theta\hat{\boldsymbol{z}} \end{cases} \tag{9.222}$$

9.6.4 波数ベクトルと磁場ベクトルから座標系を定義する。

波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の方向を Z 方向とし、外部磁場ベクトル $\boldsymbol{B}_0$ が ZX 平面上にある直交座標系である XYZ 座標系について考える。



Z 軸は $\boldsymbol{k}$ 方向を向いており、Y 軸は $\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B}_0$ 方向を向いており、X 軸は $-\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{B}_0)$ 方向を向いている。一方、波数ベクトルの方向を ζ_k 軸とした $\xi_k\psi_k\zeta_k$ 座標系と、外部磁場ベクトルの方向を ζ_b 軸とした $\xi_b\psi_b\zeta_b$

座標系とすると、

$$\hat{\boldsymbol{Z}} = \frac{\boldsymbol{k}}{|\boldsymbol{k}|} \tag{9.223}$$

$$= \hat{\boldsymbol{\zeta}}_k \tag{9.224}$$

$$= \cos\phi_k \sin\theta_k \hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi_k \sin\theta_k \hat{\boldsymbol{y}} + \cos\theta_k \hat{\boldsymbol{z}} \tag{9.225}$$

念のため、大きさを求めると、

$$\left|\hat{\boldsymbol{Z}}\right|^2 = |\cos\phi_k \sin\theta_k \hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi_k \sin\theta_k \hat{\boldsymbol{y}} + \cos\theta_k \hat{\boldsymbol{z}}|^2 \tag{9.226}$$

$$= \cos^2\phi_k \sin^2\theta_k + \sin^2\phi_k \sin^2\theta_k + \cos^2\theta_k \tag{9.227}$$

$$= 1 \tag{9.228}$$

$$\hat{\boldsymbol{Y}} = \frac{\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{B}_0}{|\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{B}_0|} \tag{9.229}$$

$$= \frac{\hat{\boldsymbol{\zeta}}_k \times \hat{\boldsymbol{\zeta}}_b}{\left|\hat{\boldsymbol{\zeta}}_k \times \hat{\boldsymbol{\zeta}}_b\right|} \tag{9.230}$$

$$= \frac{(\cos\phi_k \sin\theta_k \hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi_k \sin\theta_k \hat{\boldsymbol{y}} + \cos\theta_k \hat{\boldsymbol{z}}) \times (\cos\phi_b \sin\theta_b \hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi_b \sin\theta_b \hat{\boldsymbol{y}} + \cos\theta_b \hat{\boldsymbol{z}})}{\left|\hat{\boldsymbol{\zeta}}_k \times \hat{\boldsymbol{\zeta}}_b\right|} \tag{9.231}$$

分子だけ抜き出す。

$$
\begin{aligned}
&(\cos\phi_k \sin\theta_k \hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi_k \sin\theta_k \hat{\boldsymbol{y}} + \cos\theta_k \hat{\boldsymbol{z}}) \times (\cos\phi_b \sin\theta_b \hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi_b \sin\theta_b \hat{\boldsymbol{y}} + \cos\theta_b \hat{\boldsymbol{z}}) && (9.232)\\
=&\cos\phi_k \sin\theta_k \hat{\boldsymbol{x}} \times \cos\phi_b \sin\theta_b \hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi_k \sin\theta_k \hat{\boldsymbol{y}} \times \cos\phi_b \sin\theta_b \hat{\boldsymbol{x}} + \cos\theta_k \hat{\boldsymbol{z}} \times \cos\phi_b \sin\theta_b \hat{\boldsymbol{x}}\\
&+ \cos\phi_k \sin\theta_k \hat{\boldsymbol{x}} \times \sin\phi_b \sin\theta_b \hat{\boldsymbol{y}} + \sin\phi_k \sin\theta_k \hat{\boldsymbol{y}} \times \sin\phi_b \sin\theta_b \hat{\boldsymbol{y}} + \cos\theta_k \hat{\boldsymbol{z}} \times \sin\phi_b \sin\theta_b \hat{\boldsymbol{y}}\\
&+ \cos\phi_k \sin\theta_k \hat{\boldsymbol{x}} \times \cos\theta_b \hat{\boldsymbol{z}} + \sin\phi_k \sin\theta_k \hat{\boldsymbol{y}} \times \cos\theta_b \hat{\boldsymbol{z}} + \cos\theta_k \hat{\boldsymbol{z}} \times \cos\theta_b \hat{\boldsymbol{z}} && (9.233)\\
=&\sin\phi_k \sin\theta_k \cos\phi_b \sin\theta_b \hat{\boldsymbol{y}} \times \hat{\boldsymbol{x}} + \cos\theta_k \cos\phi_b \sin\theta_b \hat{\boldsymbol{z}} \times \hat{\boldsymbol{x}}\\
&+ \cos\phi_k \sin\theta_k \sin\phi_b \sin\theta_b \hat{\boldsymbol{x}} \times \hat{\boldsymbol{y}} + \cos\theta_k \sin\phi_b \sin\theta_b \hat{\boldsymbol{z}} \times \hat{\boldsymbol{y}}\\
&+ \cos\phi_k \sin\theta_k \cos\theta_b \hat{\boldsymbol{x}} \times \hat{\boldsymbol{z}} + \sin\phi_k \sin\theta_k \cos\theta_b \hat{\boldsymbol{y}} \times \hat{\boldsymbol{z}} && (9.234)\\
=&-\sin\phi_k \sin\theta_k \cos\phi_b \sin\theta_b \hat{\boldsymbol{z}} + \cos\theta_k \cos\phi_b \sin\theta_b \hat{\boldsymbol{y}}\\
&+ \cos\phi_k \sin\theta_k \sin\phi_b \sin\theta_b \hat{\boldsymbol{z}} - \cos\theta_k \sin\phi_b \sin\theta_b \hat{\boldsymbol{x}}\\
&- \cos\phi_k \sin\theta_k \cos\theta_b \hat{\boldsymbol{y}} + \sin\phi_k \sin\theta_k \cos\theta_b \hat{\boldsymbol{x}} && (9.235)\\
=&-\cos\theta_k \sin\phi_b \sin\theta_b \hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi_k \sin\theta_k \cos\theta_b \hat{\boldsymbol{x}}\\
&+ \cos\theta_k \cos\phi_b \sin\theta_b \hat{\boldsymbol{y}} - \cos\phi_k \sin\theta_k \cos\theta_b \hat{\boldsymbol{y}}\\
&- \sin\phi_k \sin\theta_k \cos\phi_b \sin\theta_b \hat{\boldsymbol{z}} + \cos\phi_k \sin\theta_k \sin\phi_b \sin\theta_b \hat{\boldsymbol{z}} && (9.236)\\
=&-\cos\theta_k \sin\theta_b \sin\phi_b \hat{\boldsymbol{x}} + \sin\theta_k \cos\theta_b \sin\phi_k \hat{\boldsymbol{x}}\\
&+ \cos\theta_k \sin\theta_b \cos\phi_b \hat{\boldsymbol{y}} - \sin\theta_k \cos\theta_b \cos\phi_k \hat{\boldsymbol{y}}\\
&- \sin\theta_k \sin\theta_b \sin\phi_k \cos\phi_b \hat{\boldsymbol{z}} + \sin\theta_k \sin\theta_b \cos\phi_k \sin\phi_b \hat{\boldsymbol{z}} && (9.237)\\
=&\left(-\cos\theta_k \sin\theta_b \sin\phi_b + \sin\theta_k \cos\theta_b \sin\phi_k\right) \hat{\boldsymbol{x}}\\
&+ \left(\cos\theta_k \sin\theta_b \cos\phi_b - \sin\theta_k \cos\theta_b \cos\phi_k\right) \hat{\boldsymbol{y}}\\
&+ \left(-\sin\theta_k \sin\theta_b \sin\phi_k \cos\phi_b + \sin\theta_k \sin\theta_b \cos\phi_k \sin\phi_b\right) \hat{\boldsymbol{z}} && (9.238)
\end{aligned}
$$

三角関数の積和公式

$$
\begin{cases}
\sin\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)\right\}\\
\cos\alpha\sin\beta = \dfrac{1}{2}\left\{\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)\right\}\\
\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)\right\}\\
\sin\alpha\sin\beta = -\dfrac{1}{2}\left\{\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)\right\}
\end{cases}
\tag{9.239}
$$

を利用して、

$$
\begin{aligned}
=& -\{\cos\theta_k \sin\theta_b\} \sin\phi_b \hat{\boldsymbol{x}} + \{\sin\theta_k \cos\theta_b\} \sin\phi_k \hat{\boldsymbol{x}} \\
&+ \{\cos\theta_k \sin\theta_b\} \cos\phi_b \hat{\boldsymbol{y}} - \{\sin\theta_k \cos\theta_b\} \cos\phi_k \hat{\boldsymbol{y}} \\
&- \{\sin\theta_k \sin\theta_b\} \sin\phi_k \cos\phi_b \hat{\boldsymbol{z}} + \{\sin\theta_k \sin\theta_b\} \cos\phi_k \sin\phi_b \hat{\boldsymbol{z}}
\end{aligned}
\tag{9.240}
$$

$$
\begin{aligned}
=& -\frac{1}{2}\{\sin(\theta_k+\theta_b) - \sin(\theta_k-\theta_b)\} \sin\phi_b \hat{\boldsymbol{x}} + \frac{1}{2}\{\sin(\theta_k+\theta_b) + \sin(\theta_k-\theta_b)\} \sin\phi_k \hat{\boldsymbol{x}} \\
&+ \frac{1}{2}\{\sin(\theta_k+\theta_b) - \sin(\theta_k-\theta_b)\} \cos\phi_b \hat{\boldsymbol{y}} - \frac{1}{2}\{\sin(\theta_k+\theta_b) + \sin(\theta_k-\theta_b)\} \cos\phi_k \hat{\boldsymbol{y}} \\
&+ \frac{1}{2}\{\cos(\theta_k+\theta_b) - \cos(\theta_k-\theta_b)\} \sin\phi_k \cos\phi_b \hat{\boldsymbol{z}} - \frac{1}{2}\{\cos(\theta_k+\theta_b) - \cos(\theta_k-\theta_b)\} \cos\phi_k \sin\phi_b \hat{\boldsymbol{z}}
\end{aligned}
\tag{9.241}
$$

$$
\begin{aligned}
=& -\left\{\frac{1}{2}\sin(\theta_k+\theta_b)\sin\phi_b \hat{\boldsymbol{x}} - \frac{1}{2}\sin(\theta_k-\theta_b)\sin\phi_b \hat{\boldsymbol{x}}\right\} + \left\{\frac{1}{2}\sin(\theta_k+\theta_b)\sin\phi_k \hat{\boldsymbol{x}} + \frac{1}{2}\sin(\theta_k-\theta_b)\sin\phi_k \hat{\boldsymbol{x}}\right\} \\
&+ \left\{\frac{1}{2}\sin(\theta_k+\theta_b)\cos\phi_b \hat{\boldsymbol{y}} - \frac{1}{2}\sin(\theta_k-\theta_b)\cos\phi_b \hat{\boldsymbol{y}}\right\} - \left\{\frac{1}{2}\sin(\theta_k+\theta_b)\cos\phi_k \hat{\boldsymbol{y}} + \frac{1}{2}\sin(\theta_k-\theta_b)\cos\phi_k \hat{\boldsymbol{y}}\right\} \\
&+ \left\{\frac{1}{2}\cos(\theta_k+\theta_b)\sin\phi_k\cos\phi_b \hat{\boldsymbol{z}} - \frac{1}{2}\cos(\theta_k-\theta_b)\sin\phi_k\cos\phi_b \hat{\boldsymbol{z}}\right\} - \left\{\frac{1}{2}\cos(\theta_k+\theta_b)\cos\phi_k\sin\phi_b \hat{\boldsymbol{z}} - \frac{1}{2}\cos(\theta_k-\theta_b)\cos
\end{aligned}
\tag{9.242}
$$

$$
\begin{aligned}
=& \frac{1}{2}\left[-\sin(\theta_k+\theta_b)\sin\phi_b + \sin(\theta_k+\theta_b)\sin\phi_k + \sin(\theta_k-\theta_b)\sin\phi_b + \sin(\theta_k-\theta_b)\sin\phi_k\right] \hat{\boldsymbol{x}} \\
&+ \frac{1}{2}\left[\sin(\theta_k+\theta_b)\cos\phi_b - \sin(\theta_k+\theta_b)\cos\phi_k - \sin(\theta_k-\theta_b)\cos\phi_b - \sin(\theta_k-\theta_b)\cos\phi_k\right] \hat{\boldsymbol{y}} \\
&+ \frac{1}{2}\left[\cos(\theta_k+\theta_b)\sin\phi_k\cos\phi_b - \cos(\theta_k+\theta_b)\cos\phi_k\sin\phi_b - \cos(\theta_k-\theta_b)\sin\phi_k\cos\phi_b + \cos(\theta_k-\theta_b)\cos\phi_k\sin\phi_b\right] \hat{\boldsymbol{z}}
\end{aligned}
\tag{9.243}
$$

$$
\begin{aligned}
=& \frac{1}{2}\left[\sin(\theta_k+\theta_b)\{-\sin\phi_b + \sin\phi_k\} + \sin(\theta_k-\theta_b)\{\sin\phi_b + \sin\phi_k\}\right] \hat{\boldsymbol{x}} \\
&+ \frac{1}{2}\left[\sin(\theta_k+\theta_b)\{\cos\phi_b - \cos\phi_k\} - \sin(\theta_k-\theta_b)\{\cos\phi_b + \cos\phi_k\}\right] \hat{\boldsymbol{y}} \\
&+ \frac{1}{2}\left[\cos(\theta_k+\theta_b)\{\sin\phi_k\cos\phi_b - \cos\phi_k\sin\phi_b\} - \cos(\theta_k-\theta_b)\{\sin\phi_k\cos\phi_b - \cos\phi_k\sin\phi_b\}\right] \hat{\boldsymbol{z}}
\end{aligned}
\tag{9.244}
$$

$$
\begin{aligned}
=& \frac{1}{2}\left[\sin(\theta_k+\theta_b)\{-\sin\phi_b + \sin\phi_k\} + \sin(\theta_k-\theta_b)\{\sin\phi_b + \sin\phi_k\}\right] \hat{\boldsymbol{x}} \\
&+ \frac{1}{2}\left[\sin(\theta_k+\theta_b)\{\cos\phi_b - \cos\phi_k\} - \sin(\theta_k-\theta_b)\{\cos\phi_b + \cos\phi_k\}\right] \hat{\boldsymbol{y}} \\
&+ \frac{1}{2}\left[\cos(\theta_k+\theta_b) - \cos(\theta_k-\theta_b)\right]\sin(\phi_k-\phi_b) \hat{\boldsymbol{z}}
\end{aligned}
\tag{9.245}
$$

$$
\tag{9.246}
$$

三角関数の和積公式、

$$\begin{cases} \sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} \\ \sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2} \\ \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2} \\ \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2} \end{cases} \tag{9.247}$$

$$\begin{aligned} &= (-\cos\theta_k \sin\phi_b \sin\theta_b + \sin\phi_k \sin\theta_k \cos\theta_b)\,\hat{\boldsymbol{x}} \\ &\quad + (\cos\theta_k \cos\phi_b \sin\theta_b - \cos\phi_k \sin\theta_k \cos\theta_b)\,\hat{\boldsymbol{y}} \\ &\quad + (-\sin\phi_k \cos\phi_b + \cos\phi_k \sin\phi_b)\sin\theta_k \sin\theta_b \hat{\boldsymbol{z}} \end{aligned} \tag{9.248}$$

$$\begin{aligned} &= (-\cos\theta_k \sin\phi_b \sin\theta_b + \sin\phi_k \sin\theta_k \cos\theta_b)\,\hat{\boldsymbol{x}} \\ &\quad + (\cos\theta_k \cos\phi_b \sin\theta_b - \cos\phi_k \sin\theta_k \cos\theta_b)\,\hat{\boldsymbol{y}} \\ &\quad + (\sin(-\phi_k)\cos\phi_b + \cos(-\phi_k)\sin\phi_b)\sin\theta_k \sin\theta_b \hat{\boldsymbol{z}} \end{aligned} \tag{9.249}$$

$$\begin{aligned} &= (-\cos\theta_k \sin\phi_b \sin\theta_b + \sin\phi_k \sin\theta_k \cos\theta_b)\,\hat{\boldsymbol{x}} \\ &\quad + (\cos\theta_k \cos\phi_b \sin\theta_b - \cos\phi_k \sin\theta_k \cos\theta_b)\,\hat{\boldsymbol{y}} \\ &\quad + \sin(-\phi_k + \phi_b)\sin\theta_k \sin\theta_b \hat{\boldsymbol{z}} \end{aligned} \tag{9.250}$$

その大きさの２乗は、

$$
\begin{aligned}
&(-\cos\theta_k \sin\phi_b \sin\theta_b + \sin\phi_k \sin\theta_k \cos\theta_b)^2 && (9.251)\\
&+ (\cos\theta_k \cos\phi_b \sin\theta_b - \cos\phi_k \sin\theta_k \cos\theta_b)^2 && (9.252)\\
&+ (\sin(-\phi_k + \phi_b) \sin\theta_k \sin\theta_b)^2 && (9.253)\\
=& \cos^2\theta_k \sin^2\phi_b \sin^2\theta_b - 2\cos\theta_k \sin\phi_b \sin\theta_b \sin\phi_k \sin\theta_k \cos\theta_b + \sin^2\phi_k \sin^2\theta_k \cos^2\theta_b && (9.254)\\
&+ \cos^2\theta_k \cos^2\phi_b \sin^2\theta_b - 2\cos\theta_k \cos\phi_b \sin\theta_b \cos\phi_k \sin\theta_k \cos\theta_b + \cos^2\phi_k \sin^2\theta_k \cos^2\theta_b && (9.255)\\
&+ \sin^2(-\phi_k + \phi_b) \sin^2\theta_k \sin^2\theta_b && (9.256)\\
=& \cos^2\theta_k \sin^2\phi_b \sin^2\theta_b + \cos^2\theta_k \cos^2\phi_b \sin^2\theta_b && (9.257)\\
&- 2\cos\theta_k \sin\phi_b \sin\theta_b \sin\phi_k \sin\theta_k \cos\theta_b - 2\cos\theta_k \cos\phi_b \sin\theta_b \cos\phi_k \sin\theta_k \cos\theta_b && (9.258)\\
&+ \sin^2\phi_k \sin^2\theta_k \cos^2\theta_b + \cos^2\phi_k \sin^2\theta_k \cos^2\theta_b && (9.259)\\
&+ \sin^2(-\phi_k + \phi_b) \sin^2\theta_k \sin^2\theta_b && (9.260)\\
=& \cos^2\theta_k \sin^2\theta_b && (9.261)\\
&- 2\left(\sin\phi_b \sin\phi_k + \cos\phi_b \cos\phi_k\right) \cos\theta_k \sin\theta_b \sin\theta_k \cos\theta_b && (9.262)\\
&+ \sin^2\theta_k \cos^2\theta_b && (9.263)\\
&+ \sin^2(-\phi_k + \phi_b) \sin^2\theta_k \sin^2\theta_b && (9.264)\\
=& \cos^2\theta_k \sin^2\theta_b && (9.265)\\
&- 2\left(-\sin\phi_b \sin(-\phi_k) + \cos\phi_b \cos(-\phi_k)\right) \cos\theta_k \sin\theta_b \sin\theta_k \cos\theta_b && (9.266)\\
&+ \sin^2\theta_k \cos^2\theta_b && (9.267)\\
&+ \sin^2(-\phi_k + \phi_b) \sin^2\theta_k \sin^2\theta_b && (9.268)\\
=& \cos^2\theta_k \sin^2\theta_b && (9.269)\\
&- 2\cos(-\phi_k + \phi_b) \cos\theta_k \sin\theta_b \sin\theta_k \cos\theta_b && (9.270)\\
&+ \sin^2\theta_k \cos^2\theta_b && (9.271)\\
&+ \sin^2(-\phi_k + \phi_b) \sin^2\theta_k \sin^2\theta_b && (9.272)\\
=& \cos^2\theta_k \sin^2\theta_b && (9.273)\\
&- 2\cos(-\phi_k + \phi_b) \cos\theta_k \sin\theta_b \sin\theta_k \cos\theta_b && (9.274)\\
&+ \sin^2\theta_k \cos^2\theta_b && (9.275)\\
&+ \left(1 - \cos^2(-\phi_k + \phi_b)\right) \sin^2\theta_k \sin^2\theta_b && (9.276)\\
=& \cos^2\theta_k \sin^2\theta_b && (9.277)\\
&- 2\cos(-\phi_k + \phi_b) \cos\theta_k \sin\theta_b \sin\theta_k \cos\theta_b && (9.278)\\
&+ \sin^2\theta_k \cos^2\theta_b && (9.279)\\
&+ \sin^2\theta_k \sin^2\theta_b - \cos^2(-\phi_k + \phi_b) \sin^2\theta_k \sin^2\theta_b && (9.280)
\end{aligned}
$$

$$\hat{\boldsymbol{X}} = \frac{-\boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{B}_0)}{|-\boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{B}_0)|} \tag{9.281}$$

$$= \frac{-\hat{\boldsymbol{\zeta}}_k \times (\hat{\boldsymbol{\zeta}}_k \times \hat{\boldsymbol{\zeta}}_b)}{\left|-\hat{\boldsymbol{\zeta}}_k \times (\hat{\boldsymbol{\zeta}}_k \times \hat{\boldsymbol{\zeta}}_b)\right|} \tag{9.282}$$

分子だけ抜き出して、

$$
\begin{aligned}
&-\hat{\boldsymbol{\zeta}}_k \times (\hat{\boldsymbol{\zeta}}_k \times \hat{\boldsymbol{\zeta}}_b) && (9.283)\\
=&-(\cos\phi_k \sin\theta_k \hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi_k \sin\theta_k \hat{\boldsymbol{y}} + \cos\theta_k \hat{\boldsymbol{z}}) \times && (9.284)\\
&((-\cos\theta_k \sin\theta_b \sin\phi_b + \sin\theta_k \cos\theta_b \sin\phi_k)\,\hat{\boldsymbol{x}}\\
&+\ (\cos\theta_k \sin\theta_b \cos\phi_b - \sin\theta_k \cos\theta_b \cos\phi_k)\,\hat{\boldsymbol{y}}\\
&+\ (-\sin\theta_k \sin\theta_b \sin\phi_k \cos\phi_b + \sin\theta_k \sin\theta_b \cos\phi_k \sin\phi_b)\,\hat{\boldsymbol{z}}) && (9.285)\\
=&-\{\cos\phi_k \sin\theta_k \hat{\boldsymbol{x}} \times (-\cos\theta_k \sin\theta_b \sin\phi_b + \sin\theta_k \cos\theta_b \sin\phi_k)\,\hat{\boldsymbol{x}}\\
&+\sin\phi_k \sin\theta_k \hat{\boldsymbol{y}} \times (-\cos\theta_k \sin\theta_b \sin\phi_b + \sin\theta_k \cos\theta_b \sin\phi_k)\,\hat{\boldsymbol{x}}\\
&+\cos\theta_k \hat{\boldsymbol{z}} \times (-\cos\theta_k \sin\theta_b \sin\phi_b + \sin\theta_k \cos\theta_b \sin\phi_k)\,\hat{\boldsymbol{x}}\\
&+\ \cos\phi_k \sin\theta_k \hat{\boldsymbol{x}} \times (\cos\theta_k \sin\theta_b \cos\phi_b - \sin\theta_k \cos\theta_b \cos\phi_k)\,\hat{\boldsymbol{y}}\\
&+\ \sin\phi_k \sin\theta_k \hat{\boldsymbol{y}} \times (\cos\theta_k \sin\theta_b \cos\phi_b - \sin\theta_k \cos\theta_b \cos\phi_k)\,\hat{\boldsymbol{y}}\\
&+\ \cos\theta_k \hat{\boldsymbol{z}} \times (\cos\theta_k \sin\theta_b \cos\phi_b - \sin\theta_k \cos\theta_b \cos\phi_k)\,\hat{\boldsymbol{y}}\\
&+\ \cos\phi_k \sin\theta_k \hat{\boldsymbol{x}} \times (-\sin\theta_k \sin\theta_b \sin\phi_k \cos\phi_b + \sin\theta_k \sin\theta_b \cos\phi_k \sin\phi_b)\,\hat{\boldsymbol{z}} && (9.286)\\
&+\ \sin\phi_k \sin\theta_k \hat{\boldsymbol{y}} \times (-\sin\theta_k \sin\theta_b \sin\phi_k \cos\phi_b + \sin\theta_k \sin\theta_b \cos\phi_k \sin\phi_b)\,\hat{\boldsymbol{z}} && (9.287)\\
&+\ \cos\theta_k \hat{\boldsymbol{z}} \times (-\sin\theta_k \sin\theta_b \sin\phi_k \cos\phi_b + \sin\theta_k \sin\theta_b \cos\phi_k \sin\phi_b)\,\hat{\boldsymbol{z}}\} && (9.288)\\
=&-\{-\sin\phi_k \sin\theta_k\,(-\cos\theta_k \sin\theta_b \sin\phi_b + \sin\theta_k \cos\theta_b \sin\phi_k)\,\hat{\boldsymbol{z}}\\
&+\cos\theta_k\,(-\cos\theta_k \sin\theta_b \sin\phi_b + \sin\theta_k \cos\theta_b \sin\phi_k)\,\hat{\boldsymbol{y}}\\
&+\ \cos\phi_k \sin\theta_k\,(\cos\theta_k \sin\theta_b \cos\phi_b - \sin\theta_k \cos\theta_b \cos\phi_k)\,\hat{\boldsymbol{z}}\\
&-\ \cos\theta_k\,(\cos\theta_k \sin\theta_b \cos\phi_b - \sin\theta_k \cos\theta_b \cos\phi_k)\,\hat{\boldsymbol{x}}\\
&-\ \cos\phi_k \sin\theta_k\,(-\sin\theta_k \sin\theta_b \sin\phi_k \cos\phi_b + \sin\theta_k \sin\theta_b \cos\phi_k \sin\phi_b)\,\hat{\boldsymbol{y}} && (9.289)\\
&+\ \sin\phi_k \sin\theta_k\,(-\sin\theta_k \sin\theta_b \sin\phi_k \cos\phi_b + \sin\theta_k \sin\theta_b \cos\phi_k \sin\phi_b)\,\hat{\boldsymbol{x}}\} && (9.290)\\
=&-\left\{\left(\sin\phi_k \sin\theta_k \cos\theta_k \sin\theta_b \sin\phi_b - \sin\phi_k \sin^2\theta_k \cos\theta_b \sin\phi_k\right)\hat{\boldsymbol{z}}\right.\\
&+\left(-\cos^2\theta_k \sin\theta_b \sin\phi_b + \cos\theta_k \sin\theta_k \cos\theta_b \sin\phi_k\right)\hat{\boldsymbol{y}}\\
&+\ \left(\cos\phi_k \sin\theta_k \cos\theta_k \sin\theta_b \cos\phi_b - \cos\phi_k \sin^2\theta_k \cos\theta_b \cos\phi_k\right)\hat{\boldsymbol{z}}\\
&-\ \left(\cos^2\theta_k \sin\theta_b \cos\phi_b - \cos\theta_k \sin\theta_k \cos\theta_b \cos\phi_k\right)\hat{\boldsymbol{x}}\\
&+\ \left(\cos\phi_k \sin^2\theta_k \sin\theta_b \sin\phi_k \cos\phi_b - \cos^2\phi_k \sin^2\theta_k \sin\theta_b \sin\phi_b\right)\hat{\boldsymbol{y}} && (9.291)\\
&+\ \left.\left(-\sin^2\phi_k \sin^2\theta_k \sin\theta_b \cos\phi_b + \sin\phi_k \sin^2\theta_k \sin\theta_b \cos\phi_k \sin\phi_b\right)\hat{\boldsymbol{x}}\right\} && (9.292)\\
=&-\{ && (9.293)\\
&-\ \left(\cos^2\theta_k \sin\theta_b \cos\phi_b - \cos\theta_k \sin\theta_k \cos\theta_b \cos\phi_k\right)\hat{\boldsymbol{x}}\\
&+\ \left(-\sin^2\phi_k \sin^2\theta_k \sin\theta_b \cos\phi_b + \sin\phi_k \sin^2\theta_k \sin\theta_b \cos\phi_k \sin\phi_b\right)\hat{\boldsymbol{x}} && (9.294)\\
&+\left(-\cos^2\theta_k \sin\theta_b \sin\phi_b + \cos\theta_k \sin\theta_k \cos\theta_b \sin\phi_k\right)\hat{\boldsymbol{y}}\\
&+\ \left(\cos\phi_k \sin^2\theta_k \sin\theta_b \sin\phi_k \cos\phi_b - \cos^2\phi_k \sin^2\theta_k \sin\theta_b \sin\phi_b\right)\hat{\boldsymbol{y}} && (9.295)\\
&\left(\sin\phi_k \sin\theta_k \cos\theta_k \sin\theta_b \sin\phi_b - \sin\phi_k \sin^2\theta_k \cos\theta_b \sin\phi_k\right)\hat{\boldsymbol{z}}\\
&+\ \left(\cos\phi_k \sin\theta_k \cos\theta_k \sin\theta_b \cos\phi_b - \cos\phi_k \sin^2\theta_k \cos\theta_b \cos\phi_k\right)\hat{\boldsymbol{z}}\\
&\} && (9.296)
\end{aligned}
$$

9.6.4.1 行列で表現してみる

$$\hat{\boldsymbol{Z}} = \cos\phi_k \sin\theta_k \hat{\boldsymbol{x}} + \sin\phi_k \sin\theta_k \hat{\boldsymbol{y}} + \cos\theta_k \hat{\boldsymbol{z}} \tag{9.297}$$

$$= \cos\phi_k \sin\theta_k \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \sin\phi_k \sin\theta_k \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \cos\theta_k \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \tag{9.298}$$

9.7 テンソルとベクトルとの積の発散

$\boldsymbol{A}$ をテンソル、$\boldsymbol{b}$ をベクトルとして、

$$\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{b})$$

を計算する。

$$\begin{aligned}
&\nabla \cdot (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{b}) \\
=\;& \frac{\partial}{\partial x}(A_{xx}b_x + A_{xy}b_y + A_{xz}b_z) + \frac{\partial}{\partial y}(A_{yx}b_x + A_{yy}b_y + A_{yz}b_z) + \frac{\partial}{\partial z}(A_{zx}b_x + A_{zy}b_y + A_{zz}b_z) \\
=\;& \left(\frac{\partial A_{xx}}{\partial x}b_x + \frac{\partial A_{xy}}{\partial x}b_y + \frac{\partial A_{xz}}{\partial x}b_z\right) + \left(\frac{\partial A_{yx}}{\partial y}b_x + \frac{\partial A_{yy}}{\partial y}b_y + \frac{\partial A_{yz}}{\partial y}b_z\right) + \left(\frac{\partial A_{zx}}{\partial z}b_x + \frac{\partial A_{zy}}{\partial z}b_y + \frac{\partial A_{zz}}{\partial z}b_z\right) \\
& + \left(A_{xx}\frac{\partial b_x}{\partial x} + A_{xy}\frac{\partial b_y}{\partial x} + A_{xz}\frac{\partial b_z}{\partial x}\right) + \left(A_{yx}\frac{\partial b_x}{\partial y} + A_{yy}\frac{\partial b_y}{\partial y} + A_{yz}\frac{\partial b_z}{\partial y}\right) + \left(A_{zx}\frac{\partial b_x}{\partial z} + A_{zy}\frac{\partial b_y}{\partial z} + A_{zz}\frac{\partial b_z}{\partial z}\right) \\
=\;& \left(\frac{\partial A_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial A_{zx}}{\partial z}\right)b_x + \left(\frac{\partial A_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial A_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{zy}}{\partial z}\right)b_y + \left(\frac{\partial A_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial A_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial A_{zz}}{\partial z}\right)b_z \\
& + \left(A_{xx}\frac{\partial}{\partial x} + A_{yx}\frac{\partial}{\partial y} + A_{zx}\frac{\partial}{\partial z}\right)b_x + \left(A_{xy}\frac{\partial}{\partial x} + A_{yy}\frac{\partial}{\partial y} + A_{zy}\frac{\partial}{\partial z}\right)b_y + \left(A_{xz}\frac{\partial}{\partial x} + A_{yz}\frac{\partial}{\partial y} + A_{zz}\frac{\partial}{\partial z}\right)b_z \\
=\;& \begin{pmatrix} \frac{\partial A_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial A_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial A_{zx}}{\partial z} & \frac{\partial A_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial A_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial A_{zy}}{\partial z} & \frac{\partial A_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial A_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial A_{zz}}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \\
& + \begin{pmatrix} A_{xx}\frac{\partial}{\partial x} + A_{yx}\frac{\partial}{\partial y} + A_{zx}\frac{\partial}{\partial z} \\ A_{xy}\frac{\partial}{\partial x} + A_{yy}\frac{\partial}{\partial y} + A_{zy}\frac{\partial}{\partial z} \\ A_{xz}\frac{\partial}{\partial x} + A_{yz}\frac{\partial}{\partial y} + A_{zz}\frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \\
=\;& \left(\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{xx} & A_{xy} & A_{xz} \\ A_{yx} & A_{yy} & A_{yz} \\ A_{zx} & A_{zy} & A_{zz} \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \\
& + \left(\begin{pmatrix} A_{xx} & A_{yx} & A_{zx} \\ A_{xy} & A_{yy} & A_{zy} \\ A_{xz} & A_{yz} & A_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \\
=\;& (\nabla \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{A}^t \nabla) \cdot \boldsymbol{b} \\
=\;& (\nabla \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^t \nabla) \cdot \boldsymbol{b}
\end{aligned}$$

9.8 テンソルとベクトルとの積の回転

$\boldsymbol{A}$ をテンソル、$\boldsymbol{b}$ をベクトルとして、

$$\nabla \times (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{b})$$

を計算する。

$$\begin{aligned}
&\nabla \times (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{b}) \\
&= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_{xx}b_x + A_{xy}b_y + A_{xz}b_z & A_{yx}b_x + A_{yy}b_y + A_{yz}b_z & A_{zx}b_x + A_{zy}b_y + A_{zz}b_z \end{vmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}\left(A_{zx}b_x + A_{zy}b_y + A_{zz}b_z\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(A_{yx}b_x + A_{yy}b_y + A_{yz}b_z\right) \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(A_{xx}b_x + A_{xy}b_y + A_{xz}b_z\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(A_{zx}b_x + A_{zy}b_y + A_{zz}b_z\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(A_{yx}b_x + A_{yy}b_y + A_{yz}b_z\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(A_{xx}b_x + A_{xy}b_y + A_{xz}b_z\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial A_{zx}}{\partial y}b_x + \frac{\partial A_{zy}}{\partial y}b_y + \frac{\partial A_{zz}}{\partial y}b_z\right) - \left(\frac{\partial A_{yx}}{\partial z}b_x + \frac{\partial A_{yy}}{\partial z}b_y + \frac{\partial A_{yz}}{\partial z}b_z\right) \\ \left(\frac{\partial A_{xx}}{\partial z}b_x + \frac{\partial A_{xy}}{\partial z}b_y + \frac{\partial A_{xz}}{\partial z}b_z\right) - \left(\frac{\partial A_{zx}}{\partial x}b_x + \frac{\partial A_{zy}}{\partial x}b_y + \frac{\partial A_{zz}}{\partial x}b_z\right) \\ \left(\frac{\partial A_{yx}}{\partial x}b_x + \frac{\partial A_{yy}}{\partial x}b_y + \frac{\partial A_{yz}}{\partial x}b_z\right) - \left(\frac{\partial A_{xx}}{\partial y}b_x + \frac{\partial A_{xy}}{\partial y}b_y + \frac{\partial A_{xz}}{\partial y}b_z\right) \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} \left(A_{zx}\frac{\partial b_x}{\partial y} + A_{zy}\frac{\partial b_y}{\partial y} + A_{zz}\frac{\partial b_z}{\partial y}\right) - \left(A_{yx}\frac{\partial b_x}{\partial z} + A_{yy}\frac{\partial b_y}{\partial z} + A_{yz}\frac{\partial b_z}{\partial z}\right) \\ \left(A_{xx}\frac{\partial b_x}{\partial z} + A_{xy}\frac{\partial b_y}{\partial z} + A_{xz}\frac{\partial b_z}{\partial z}\right) - \left(A_{zx}\frac{\partial b_x}{\partial x} + A_{zy}\frac{\partial b_y}{\partial x} + A_{zz}\frac{\partial b_z}{\partial x}\right) \\ \left(A_{yx}\frac{\partial b_x}{\partial x} + A_{yy}\frac{\partial b_y}{\partial x} + A_{yz}\frac{\partial b_z}{\partial x}\right) - \left(A_{xx}\frac{\partial b_x}{\partial y} + A_{xy}\frac{\partial b_y}{\partial y} + A_{xz}\frac{\partial b_z}{\partial y}\right) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial A_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial A_{yx}}{\partial z}\right)b_x + \left(\frac{\partial A_{zy}}{\partial y} - \frac{\partial A_{yy}}{\partial z}\right)b_y + \left(\frac{\partial A_{zz}}{\partial y} - \frac{\partial A_{yz}}{\partial z}\right)b_z \\ \left(\frac{\partial A_{xx}}{\partial z} - \frac{\partial A_{zx}}{\partial x}\right)b_x + \left(\frac{\partial A_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial A_{zy}}{\partial x}\right)b_y + \left(\frac{\partial A_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial A_{zz}}{\partial x}\right)b_z \\ \left(\frac{\partial A_{yx}}{\partial x} - \frac{\partial A_{xx}}{\partial y}\right)b_x + \left(\frac{\partial A_{yy}}{\partial x} - \frac{\partial A_{xy}}{\partial y}\right)b_y + \left(\frac{\partial A_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial A_{xz}}{\partial y}\right)b_z \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} \left(A_{zx}\frac{\partial}{\partial y} - A_{yx}\frac{\partial}{\partial z}\right)b_x + \left(A_{zy}\frac{\partial}{\partial y} - A_{yy}\frac{\partial}{\partial z}\right)b_y + \left(A_{zz}\frac{\partial}{\partial y} - A_{yz}\frac{\partial}{\partial z}\right)b_z \\ \left(A_{xx}\frac{\partial}{\partial z} - A_{zx}\frac{\partial}{\partial x}\right)b_x + \left(A_{xy}\frac{\partial}{\partial z} - A_{zy}\frac{\partial}{\partial x}\right)b_y + \left(A_{xz}\frac{\partial}{\partial z} - A_{zz}\frac{\partial}{\partial x}\right)b_z \\ \left(A_{yx}\frac{\partial}{\partial x} - A_{xx}\frac{\partial}{\partial y}\right)b_x + \left(A_{yy}\frac{\partial}{\partial x} - A_{xy}\frac{\partial}{\partial y}\right)b_y + \left(A_{yz}\frac{\partial}{\partial x} - A_{xz}\frac{\partial}{\partial y}\right)b_z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial A_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial A_{yx}}{\partial z} & \frac{\partial A_{zy}}{\partial y} - \frac{\partial A_{yy}}{\partial z} & \frac{\partial A_{zz}}{\partial y} - \frac{\partial A_{yz}}{\partial z} \\ \frac{\partial A_{xx}}{\partial z} - \frac{\partial A_{zx}}{\partial x} & \frac{\partial A_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial A_{zy}}{\partial x} & \frac{\partial A_{xz}}{\partial z} - \frac{\partial A_{zz}}{\partial x} \\ \frac{\partial A_{yx}}{\partial x} - \frac{\partial A_{xx}}{\partial y} & \frac{\partial A_{yy}}{\partial x} - \frac{\partial A_{xy}}{\partial y} & \frac{\partial A_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial A_{xz}}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} A_{zx}\frac{\partial}{\partial y} - A_{yx}\frac{\partial}{\partial z} & A_{zy}\frac{\partial}{\partial y} - A_{yy}\frac{\partial}{\partial z} & A_{zz}\frac{\partial}{\partial y} - A_{yz}\frac{\partial}{\partial z} \\ A_{xx}\frac{\partial}{\partial z} - A_{zx}\frac{\partial}{\partial x} & A_{xy}\frac{\partial}{\partial z} - A_{zy}\frac{\partial}{\partial x} & A_{xz}\frac{\partial}{\partial z} - A_{zz}\frac{\partial}{\partial x} \\ A_{yx}\frac{\partial}{\partial x} - A_{xx}\frac{\partial}{\partial y} & A_{yy}\frac{\partial}{\partial x} - A_{xy}\frac{\partial}{\partial y} & A_{yz}\frac{\partial}{\partial x} - A_{xz}\frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \nabla \times \begin{pmatrix} A_{xx} \\ A_{yx} \\ A_{zx} \end{pmatrix} & \nabla \times \begin{pmatrix} A_{xy} \\ A_{yy} \\ A_{zy} \end{pmatrix} & \nabla \times \begin{pmatrix} A_{xz} \\ A_{yz} \\ A_{zz} \end{pmatrix} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} \\
&\quad + \begin{pmatrix} -\begin{pmatrix} A_{xx} \\ A_{yx} \\ A_{zx} \end{pmatrix} \times \nabla & -\begin{pmatrix} A_{xy} \\ A_{yy} \\ A_{zy} \end{pmatrix} \times \nabla & -\begin{pmatrix} A_{xz} \\ A_{yz} \\ A_{zz} \end{pmatrix} \times \nabla \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

以下の表記法が正しいのかわからないが、

$$\nabla \times (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{b}) = (\nabla \times \boldsymbol{A}) \cdot \boldsymbol{b} - (\boldsymbol{A} \times \nabla) \cdot \boldsymbol{b}$$

特に、$\boldsymbol{A}$ が x, y, z に対して不変であるとすると、

$$\begin{aligned}
&\nabla \times (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{b}) \\
&= \left(\begin{array}{c}
\left(A_{zx}\frac{\partial b_x}{\partial y} + A_{zy}\frac{\partial b_y}{\partial y} + A_{zz}\frac{\partial b_z}{\partial y}\right) - \left(A_{yx}\frac{\partial b_x}{\partial z} + A_{yy}\frac{\partial b_y}{\partial z} + A_{yz}\frac{\partial b_z}{\partial z}\right) \\
\left(A_{xx}\frac{\partial b_x}{\partial z} + A_{xy}\frac{\partial b_y}{\partial z} + A_{xz}\frac{\partial b_z}{\partial z}\right) - \left(A_{zx}\frac{\partial b_x}{\partial x} + A_{zy}\frac{\partial b_y}{\partial x} + A_{zz}\frac{\partial b_z}{\partial x}\right) \\
\left(A_{yx}\frac{\partial b_x}{\partial x} + A_{yy}\frac{\partial b_y}{\partial x} + A_{yz}\frac{\partial b_z}{\partial x}\right) - \left(A_{xx}\frac{\partial b_x}{\partial y} + A_{xy}\frac{\partial b_y}{\partial y} + A_{xz}\frac{\partial b_z}{\partial y}\right)
\end{array} \right)
\end{aligned}$$

すなわち、

$$\nabla \times (\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{A} \cdot (\nabla \times \boldsymbol{b})$$

とするのは誤りである。