プラズマ中の波動(外部磁場の無い場合)

平成 23 年 2 月 27 日

マックスウェル方程式　マックスウェル方程式は、

$$\nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \tag{1}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \sum_s \mu_0 \boldsymbol{J}_s + \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{2}$$

である。ここで、$\boldsymbol{E}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{J}_s$、t、ρ_s、ϵ_0、μ_0 は、それぞれ電磁波の電場ベクトル、磁束密度ベクトル、荷電粒子 s による電流、荷電粒子 s の電荷密度、時間、真空中の誘電率、真空中の透磁率であり、$\sum_s$ は、全荷電粒子について電流の和を取ることを意味している。

(1) 式の両辺の回転を取ると、

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = -\frac{\partial (\nabla \times \boldsymbol{B})}{\partial t}$$

(2) 式を代入すると、

$$\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{E}) = -\mu_0 \sum_s \frac{\partial \boldsymbol{J}_s}{\partial t} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}$$

さらに、ベクトル公式 $\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \nabla^2 \boldsymbol{A}$ より、波動方程式、

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \sum_s \frac{\partial \boldsymbol{J}_s}{\partial t} = 0 \tag{3}$$

が得られる。

電場の表現　ここでは、電磁波が角周波数 ω、z 方向のみに伝播する波数 k の平面波であるとし（ただし、ω、k は実数である)、電場ベクトルの x 成分、y 成分、z 成分を、

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{x0} \exp(\alpha z) \cos(kz - \omega t + \theta_{Ex}) \\ E_{y0} \exp(\alpha z) \cos(kz - \omega t + \theta_{Ey}) \\ E_{z0} \exp(\alpha z) \cos(kz - \omega t + \theta_{Ez}) \end{pmatrix} \tag{4}$$

とする。ただし、今後の計算ため、平面波が伝播するにつれ振幅が変化するとし、その変化を表す $\exp(\alpha z)$ なる因子を含めた（ただし、α は実数である）。なお、$\theta_{Ex}, \theta_{Ey}, \theta_{Ez}$ は各成分の初期位相である。

さらに、この電場ベクトルを、以下のように複素数を用いて表す。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_- = \begin{pmatrix} E_{+x} \\ E_{+y} \\ E_{+z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_{-x} \\ E_{-y} \\ E_{-z} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} E_{x0}\exp(\alpha z)\dfrac{\exp\{i(kz-\omega t+\theta_{Ex})\}}{2} \\ E_{y0}\exp(\alpha z)\dfrac{\exp\{i(kz-\omega t+\theta_{Ey})\}}{2} \\ E_{z0}\exp(\alpha z)\dfrac{\exp\{i(kz-\omega t+\theta_{Ez})\}}{2} \end{pmatrix} \\
&+ \begin{pmatrix} E_{x0}\exp(\alpha z)\dfrac{\exp\{-i(kz-\omega t+\theta_{Ex})\}}{2} \\ E_{y0}\exp(\alpha z)\dfrac{\exp\{-i(kz-\omega t+\theta_{Ey})\}}{2} \\ E_{z0}\exp(\alpha z)\dfrac{\exp\{-i(kz-\omega t+\theta_{Ez})\}}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

ここで、

$$k - i\alpha = k_+$$

$$k + i\alpha = k_-$$

とおけば、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= \boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_- \\
&= \begin{pmatrix} E_{x0}\dfrac{\exp\{i(k_+z-\omega t+\theta_{Ex})\}}{2} \\ E_{y0}\dfrac{\exp\{i(k_+z-\omega t+\theta_{Ey})\}}{2} \\ E_{z0}\dfrac{\exp\{i(k_+z-\omega t+\theta_{Ez})\}}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} E_{x0}\dfrac{\exp\{-i(k_-z-\omega t+\theta_{Ex})\}}{2} \\ E_{y0}\dfrac{\exp\{-i(k_-z-\omega t+\theta_{Ey})\}}{2} \\ E_{z0}\dfrac{\exp\{-i(k_-z-\omega t+\theta_{Ez})\}}{2} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

である。

電流密度を電場で表す　ここで、(3) 式における電流密度ベクトル $\boldsymbol{J}_s$ の時間微分 $\partial \boldsymbol{J}_s/\partial t$ を $\boldsymbol{E}$ で表すことを考える。荷電粒子 s の質量を m_s、電荷を q_s、速度ベクトルを $\boldsymbol{v}_s$ とすると、

$$\boldsymbol{J}_s = q_s \sum_V \boldsymbol{v}_s$$

である。ここで、$\sum_V$ は、単位体積あたりに含まれる荷電粒子 s の和を取ることを表している。

ここでは、冷たいプラズマ、すなわち、荷電粒子が熱運動していない状態を扱っている。この場合、全荷電粒子揃って同一の運動をしている。そのため、

$$\sum_V \boldsymbol{v}_s = \boldsymbol{v}_s \sum_V 1 = \boldsymbol{v}_s n_s$$

の関係が成り立つ。n_s は、荷電粒子 s の体積密度（単位体積あたり荷電粒子 s の個数）のである。したがって、

$$\boldsymbol{J}_s = q_s n_s \boldsymbol{v}_s$$

が成り立つ。時間で偏微分して、

$$\frac{\partial \boldsymbol{J}_s}{\partial t} = \frac{\partial (q_s n_s \boldsymbol{v}_s)}{\partial t}$$

。ここで、n_s、$\boldsymbol{v}_s$ を、時間一定の 0 次の成分 n_{s0}、$\boldsymbol{v}_{s0}$ と、波動により微小振動する 1 次の成分 n_{s1}、$\boldsymbol{v}_{s1}$ に分ける。

$$n_s = n_{s0} + n_{s1}$$

$$\boldsymbol{v}_s = \boldsymbol{v}_{s0} + \boldsymbol{v}_{s1}$$

冷たいプラズマを考えているから $\boldsymbol{v}_{s0} = \boldsymbol{0}$ であることに注意すると、

$$\frac{\partial \boldsymbol{J}_s}{\partial t} = q_s \frac{\partial (n_{s0} \boldsymbol{v}_{s1} + n_{s1} \boldsymbol{v}_{s1})}{\partial t}$$

ここでは、微小振動を考えているため、$|n_{s0}| >> |n_{s1}|$ である。したがって、

$$\frac{\partial \boldsymbol{J}_s}{\partial t} = q_s \frac{\partial n_{s0} \boldsymbol{v}_{s1}}{\partial t} = q_s n_{s0} \frac{d \boldsymbol{v}_{s1}}{dt} \tag{5}$$

と近似できる。したがって、

一方、質量 m_s、電荷 q_s の荷電粒子 s の運動方程式は、

$$m_s \frac{d \boldsymbol{v}_s}{dt} = q_s \boldsymbol{E}$$

である。これを、(5) 式へ代入して、

$$\frac{\partial \boldsymbol{J}_s}{\partial t} = \frac{{q_s}^2 n_{s0}}{m_s} \boldsymbol{E}$$

分散式を求める　さらに、これを、(3) 式へ代入して、

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} - \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{E}) - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} - \mu_0 \sum_s \frac{{q_s}^2 n_{s0}}{m_s} \boldsymbol{E} = 0$$

この式に、$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_-$ を代入する。

$$
\begin{aligned}
& \nabla^2\boldsymbol{E} - \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E}) - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2} - \mu_0\sum_s \frac{{q_s}^2 n_{s0}}{m_s}\boldsymbol{E} \\
= \; & \nabla^2\boldsymbol{E}_+ - \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E}_+) - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}_+}{\partial t^2} - \mu_0\sum_s \frac{{q_s}^2 n_{s0}}{m_s}\boldsymbol{E}_+ \\
+ \; & \nabla^2\boldsymbol{E}_- - \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E}_-) - \epsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}_-}{\partial t^2} - \mu_0\sum_s \frac{{q_s}^2 n_{s0}}{m_s}\boldsymbol{E}_- \\
= \; & -{k_+}^2\boldsymbol{E}_+ + {k_+}^2 E_{+z}\boldsymbol{e}_z + \epsilon_0\mu_0\omega^2\boldsymbol{E}_+ - \epsilon_0\mu_0\sum_s {\omega_{ps}}^2\boldsymbol{E}_+ \\
= \; & -{k_-}^2\boldsymbol{E}_- + {k_-}^2 E_{-z}\boldsymbol{e}_z + \epsilon_0\mu_0\omega^2\boldsymbol{E}_- - \epsilon_0\mu_0\sum_s {\omega_{ps}}^2\boldsymbol{E}_- \\
= \; & \boldsymbol{0}
\end{aligned}
$$

ここで、

$$
{\omega_{ps}}^2 = \frac{{q_s}^2 n_{s0}}{\epsilon_0 m_s}
$$

であり、ω_{ps} は、荷電粒子 s のプラズマ角周波数である。これを、x、y、z 成分ごとに行列形式で表示すると、

$$
\begin{pmatrix} A_+ & 0 & 0 \\ 0 & A_+ & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} E_{+x} \\ E_{+y} \\ E_{+z} \end{pmatrix}
+
\begin{pmatrix} A_- & 0 & 0 \\ 0 & A_- & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} E_{-x} \\ E_{-y} \\ E_{-z} \end{pmatrix}
= \boldsymbol{0} \tag{6}
$$

ただし、

$$
\left\{
\begin{aligned}
A_+ &= -{k_+}^2 + \epsilon_0\mu_0\left(\omega^2 - \sum_s {\omega_{ps}}^2\right) \\
A_- &= -{k_-}^2 + \epsilon_0\mu_0\left(\omega^2 - \sum_s {\omega_{ps}}^2\right) \\
B &= \epsilon_0\mu_0\left(\omega^2 - \sum_s {\omega_{ps}}^2\right)
\end{aligned}
\right.
$$

である。$\boldsymbol{E}_+$、$\boldsymbol{E}_-$ がゼロベクトルで無いためには、

$$
\begin{vmatrix} A_+ & 0 & 0 \\ 0 & A_+ & 0 \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix} A_- & 0 & 0 \\ 0 & A_- & 0 \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix}
= 0
$$

であればよい。すなわち、

$$
{A_+}^2 B = {A_-}^2 B = 0
$$

この方程式の解は、

$$
A_+ = A_- = 0
$$

または、

$$
B = 0
$$

である。

解１：プラズマ中の波動　解が前者の場合、α、k が実数であることに注意して、

$$\left\{\begin{array}{rcl} \alpha k &=& 0 \\ (\alpha^2 - k^2) + \epsilon_0\mu_0\left(\omega^2 - \sum_s {\omega_{ps}}^2\right) &=& 0 \end{array}\right.$$

第１式より、$\alpha = 0$、または、$k = 0$ である。$\alpha = 0$ の場合、第２式は、

$$k^2 = \epsilon_0\mu_0\left(\omega^2 - \sum_s {\omega_{ps}}^2\right)$$

ただし、k は実数であるので、

$$\omega^2 \geq \sum_s {\omega_{ps}}^2$$

である必要がある。$k = 0$ の場合、第２式は、

$$\alpha^2 = -\epsilon_0\mu_0\left(\omega^2 - \sum_s {\omega_{ps}}^2\right)$$

ただし、k は実数であるので、

$$\omega^2 < \sum_s {\omega_{ps}}^2$$

である必要がある。

以上まとめると、$\omega^2 \geq \sum_s {\omega_{ps}}^2$ の場合は、

$$\left\{\begin{array}{rcl} k^2 &=& \epsilon_0\mu_0\left(\omega^2 - \sum_s {\omega_{ps}}^2\right) \\ \alpha^2 &=& 0 \end{array}\right.$$

$\omega^2 < \sum_s {\omega_{ps}}^2$ の場合は、

$$\left\{\begin{array}{rcl} k^2 &=& 0 \\ \alpha^2 &=& \epsilon_0\mu_0\left(\sum_s {\omega_{ps}}^2 - \omega^2\right) \end{array}\right.$$

ところで、このとき (6) 式は、

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{+x} \\ E_{+y} \\ E_{+z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{-x} \\ E_{-y} \\ E_{-z} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

であり、この条件を満たすためには、$E_{+z} = 0$、$E_{-z} = 0$ でないといけない。すなわち、横波であることを意味している。

解2：プラズマ振動　一方、$B = 0$ のときは、

$$\omega^2 = \sum_s {\omega_{ps}}^2$$

であり、これをプラズマ振動という。このとき (6) 式は、

$$\begin{pmatrix} A_+ & 0 & 0 \\ 0 & A_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{+x} \\ E_{+y} \\ E_{+z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_- & 0 & 0 \\ 0 & A_- & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_{-x} \\ E_{-y} \\ E_{-z} \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

これを満足するためには、$E_{+x} = E_{-x} = E_{+y} = E_{-y} = 0$ でないといけない。すなわち、縦波を意味している。

結論　以上、まとめると、

プラズマ中の波動　z 方向に伝播する（外部磁場が無いときの）プラズマ中の波動は、

$\omega^2 \geq \sum_s {\omega_{ps}}^2$ のとき、

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{x0} \cos(kz - \omega t + \theta_{Ex}) \\ E_{y0} \cos(kz - \omega t + \theta_{Ey}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

ただし、

$$k^2 = \epsilon_0 \mu_0 \left(\omega^2 - \sum_s {\omega_{ps}}^2 \right)$$

$\omega^2 < \sum_s {\omega_{ps}}^2$ のとき、

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{x0} \exp(\alpha z) \cos(-\omega t + \theta_{Ex}) \\ E_{y0} \exp(\alpha z) \cos(-\omega t + \theta_{Ey}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

ただし、

$$\alpha^2 = \epsilon_0 \mu_0 \left(\sum_s {\omega_{ps}}^2 - \omega^2 \right)$$

プラズマ振動　また、プラズマ振動として、k、α を任意の実数として、

$$\boldsymbol{E} = \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ E_{z0} \exp(\alpha z) \cos(kz - \omega t + \theta_{Ez}) \end{pmatrix}$$

ただし、

$$\omega^2 = \sum_s {\omega_{ps}}^2$$

速度ベクトル・位置ベクトル・電流密度ベクトル　ちなみに、荷電粒子 s の速度ベクトル、位置ベクトル、電流密度ベクトルは以下のとおりとなる。荷電粒子の速度ベクトルは、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}_s &= \int \frac{q_s \boldsymbol{E}}{m_s} dt \\
&= \int \frac{q_s \boldsymbol{E}_+}{m_s} dt + \int \frac{q_s \boldsymbol{E}_-}{m_s} dt \\
&= \frac{1}{-i\omega} \frac{q_s \boldsymbol{E}_+}{m_s} + \frac{1}{i\omega} \frac{q_s \boldsymbol{E}_-}{m_s} \\
&= \frac{q_s \boldsymbol{E}_+}{-i m_s \omega} + \frac{q_s \boldsymbol{E}_-}{i m_s \omega} \\
&= \frac{q_s}{m_s \omega} \frac{\boldsymbol{E}_+}{-i} + \frac{\boldsymbol{E}_-}{i} \\
&= \frac{q_s}{m_s \omega} i (\boldsymbol{E}_+ - \boldsymbol{E}_-) \\
&= -\frac{q_s}{m_s \omega} \begin{pmatrix} E_{x0} \exp(\alpha z) \sin(kz - \omega t + \theta_{Ex}) \\ E_{y0} \exp(\alpha z) \sin(kz - \omega t + \theta_{Ey}) \\ E_{z0} \exp(\alpha z) \sin(kz - \omega t + \theta_{Ez}) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

荷電粒子 s の位置ベクトルは、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{r}_s &= \int\int \frac{q_s \boldsymbol{E}}{m_s} dt dt \\
&= \int\int \frac{q_s \boldsymbol{E}_+}{m_s} dt dt + \int\int \frac{q_s \boldsymbol{E}_-}{m_s} dt dt \\
&= -\frac{1}{\omega^2} \frac{q_s \boldsymbol{E}_+}{m_s} - \frac{1}{\omega^2} \frac{q_s \boldsymbol{E}_-}{m_s} \\
&= -\frac{q_s \boldsymbol{E}_+}{m_s \omega^2} - \frac{q_s \boldsymbol{E}_-}{m_s \omega^2} \\
&= -\frac{q_s}{m_s \omega^2} (\boldsymbol{E}_+ + \boldsymbol{E}_-) \\
&= -\frac{q_s}{m_s \omega^2} \begin{pmatrix} E_{x0} \exp(\alpha z) \cos(kz - \omega t + \theta_{Ex}) \\ E_{y0} \exp(\alpha z) \cos(kz - \omega t + \theta_{Ey}) \\ E_{z0} \exp(\alpha z) \cos(kz - \omega t + \theta_{Ez}) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

同様に、荷電粒子 s による電流密度ベクトル $\boldsymbol{J}_s$ は、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{J}_s &= \frac{{q_s}^2 n_s}{m_s \omega} i (\boldsymbol{E}_+ - \boldsymbol{E}_-) \\
&= -\frac{{q_s}^2 n_s}{m_s \omega} \begin{pmatrix} E_{x0} \exp(\alpha z) \sin(kz - \omega t + \theta_{Ex}) \\ E_{y0} \exp(\alpha z) \sin(kz - \omega t + \theta_{Ey}) \\ E_{z0} \exp(\alpha z) \sin(kz - \omega t + \theta_{Ez}) \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$